සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education Ministry of Education Ministry of Education

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2023

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ: 1	
2	
අධීක්ෂණය කළේ:	

[දෙවැනි පිටුව බලන්න]

A කොටස

1. සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} 2^r = 2(2^n - 1)$ බව **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** ඇසුරෙන් සාධනය කරන්න.

2. $y = \left||x-2|-2\right|$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\left||x-2|-2\right| = \frac{x}{2}$ සමීකරණය විසඳන්න.

3. ආර්ගන්ඩ් තලය මත $0 \leq \text{Arg}\, Z \leq \frac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතාවය තෘප්ත කරන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන R පෙදෙස අඳුරු කර දක්වන්න.
R පෙදෙස තුළවූ z සඳහා $|iZ + 2|$ හි අඩුතම අගය ද සොයන්න.

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය, x හි ආරෝහණ බල ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.
$(1 + x + ax^2)^7$ ප්‍රසාරණයේ x^2 පදයේ සංගුණකය 14 නම් $a = -1$ බව පෙන්වන්න.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ බව පෙන්වන්න.

6. $f(x) = (x+1)tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$ විට $\frac{d[f(x)]}{dx}$ සොයන්න.

එනයින් $\int tan^{-1}\sqrt{x}\ dx$ ලබාගන්න.

$x = 3,\ y = 0$ හා $y = \sqrt{tan^{-1}\sqrt{x}}$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වර්ගඵලය $x -$ අක්ෂය වටා රේඩියන 2π කෝණයකින් භ්‍රමණය කළ විට ජනිතවන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\frac{\pi}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

7. θ පරාමිතියක් විට $x = a\cos\theta,\ \ y = b\sin\theta$ මගින් C නම් වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\theta = \alpha$ වන P ලක්ෂ්‍යයේ දී C වක්‍රයට ඇදි අභිලම්බයේ සමීකරණය $a\,x\,sec\,\alpha - by\,cosec\,\alpha + b^2 - a^2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ වේ. C මත $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇදි අභිලම්භයේ සමීකරණය සොයන්න.

8. $l \equiv y - mx = 0$ සරල රේඛාව $4x + 3y - k = 0$ හා $5x - 12y + 7 = 0$ යන රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරයි. m හි අගය k ඇසුරින් ලබා ගන්න. තවදුරටත් $l = 0$ රේඛාව $x + y = 0$ රේඛාවට ලම්භක බව දී ඇත්නම් m හා k හි අගයන් සොයන්න.

[හයවැනි පිටුව බලන්න.

9. කේන්ද්‍රය y - අක්ෂය මත පිහිටන S නම් වෘත්තයක් $x^2 + y^2 = 9$ වෘත්තය ප්‍රලම්භව ඡේදනය කරයි. $x^2 + y^2 + x - 7y + 5 = 0$ වෘත්තය මගින් S වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරයි නම් S සඳහා පිහිටීම් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $tan\,A = \frac{5}{12}$ හා $sinB = \frac{4}{5}$ නම් $sin\,(A + B)$ හි අගය සොයන්න.

මෙහි $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$ හා $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ වේ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2023

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

✱ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11 (a) $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ සඳහා $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල එකතුව හා මූල ගුණිතය a, b හා c ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.

$f(x) \equiv x^2 - p^2qx + q^2$ ලෙස දී ඇත. මෙහි $p, q \in \mathbb{R}^+$ වේ.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β නම්

(i) $\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}}$ හි අගය p හා q පදවලින් සොයන්න.

(ii) α හා β තාත්ත්වික වීම සඳහා p ට ගත හැකි අඩුතම නිඛිල අගය සොයන්න.

(iii) p සඳහා එම නිඛිල අගය ඇති විට $\alpha^{\frac{3}{2}}$ හා $\beta^{\frac{3}{2}}$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය q ඇසුරින් සොයන්න.

(b) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ සඳහා $P(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x + \lambda$ ලෙස බහුපදයක් දී ඇත.

(i) λ යනු $P(x)$ බහුපදයේ ශූන්‍යයක් නම් λ සඳහා ගතහැකි අගයන් සොයන්න.

(ii) $-\lambda$ යනු $P(x)$ බහුපදයේ ශූන්‍යයක් නම් λ සඳහා ගතහැකි අගයන් සොයන්න.

(iii) ඉහත (i) හා (ii) අවස්ථා දෙකම සපුරාලන λ හි අගයට අනුරූප $P(x)$ බහුපදය ලියා දක්වා, $P(x)$ යන්න ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(iv) $G(x) \equiv P(x) + 3x + 2$ බහුපදය $x^2 + 1$ න් බෙදූවිට ශේෂය සොයන්න.

12 (a) ආයතනයක මෝටර් රථ 8 ක් ඇති අතර එහි රථ ගාලෙහි එක් පෙළකට මෝටර් රථ 4 බැගින් පේළි 2 ක නැවතුම් පහසුකම් ඇත.

(i) ආයතනය සතු මෝටර් රථ 8 ගාල් කර තැබිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

(ii) මුල් පෙළෙහි මුල් ස්ථානය සභාපතිතුමාගේ මෝටර් රථයට ද මුල් පෙළෙහි ස්ථානයක් ලේකම්තුමාගේ මෝටර් රථයට ද වෙන් කළ යුතු නම් වාහන 8 ගාල් කර තැබිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

(iii) මුල් පෙළෙහි මුල් ස්ථානය සභාපතිතුමාගේ හෝ ලේකම්තුමාගේ වාහන දෙකෙන් එකකට වෙන් කළ යුතු අතර ඉන් අනෙක් වාහනයට ද මුල් පෙළෙහි ස්ථානයක් වෙන් කළ යුතු නම් වාහන ගාල් කර තැබිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $\dfrac{r^2+3r-1}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)} = \dfrac{Ar+B}{r^2-r+1} - \dfrac{Ar+2B}{r^2+r+1}$ වන පරිදි A හා B නියත ලබාගන්න. $r \epsilon \mathbb{Z}^+$ වේ.

$U_r = \dfrac{r^2+3r-1}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)}$ නම් $U_r = f_r - f_{r+1}$ වන පරිදි f_r සොයන්න.

එනයින්, $\sum_{r=1}^{n} U_r = 2 - \dfrac{(n+2)}{n^2+n+1}$ බව පෙන්වන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? හේතු දක්වන්න.

$$\sum_{r=1}^{n} U_r < 2 - \frac{11}{91}$$ නම් n ට ගත හැකි උපරිම අගය සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

13 (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ නම්, ගුණනය යටතේ A න්‍යාසය සමඟ න්‍යාදේශ වන B නම් න්‍යාසයක් $\lambda A + \mu I$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙහි λ සහ μ යනු තාත්ත්වික නියත ද I යනු 2 වන ගණයේ ඒකක න්‍යාසය ද වේ.

$B = A^2$ වන පරිදි λ සහ μ වල අගයන් සොයා එනයින් A^{-1} සොයන්න.

(b) Z^6- 1 සාධකවලට වෙන්කිරීමෙන් $Z^6 - 1 = 0$ සමීකරණයේ සියලුම විසදුම් සොයන්න.

Z_1 සහ Z_2 යනු $Z^6 = 1$ සමීකරණයේ ඕනෑම ප්‍රභින්න විසදුම් දෙකක් නම්, ආගන්ඩ් සටහන භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $|Z_1 - Z_2|$ ට ලබාගත හැකි අගයන් $1, 2$ හෝ $\sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(c) ධන නිඛිලමය n සඳහා ද' මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්

$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = (-1)^n$ බව අපෝහනය කරන්න.

14 (a) $x \neq -1$ සදහා $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න

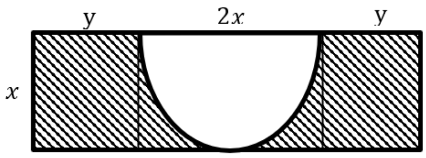
$f'(x) = -\frac{(x-3)}{(x+1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

එනයින් $f(x)$ හි අඩුවන හා වැඩිවන x හි ප්‍රාන්තර සොයන්න. $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලබාගන්න.

$x \neq -1$ සදහා $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි දිග මීටර් $2(x+y)$ හා පළල මීටර් x වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තහඩුවක වර්ගඵලය වර්ගමීටර් 8π වේ. එම තහඩුවෙන් අරය මීටර් x වූ අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කිරීමෙන් අඳුරු කළ කොටස ලබාගෙන ඇත. අඳුරු කළ කොටසේ පරිමිතිය මීටර් P නම්, $P = \pi\left(x + \frac{16}{x}\right)$ බව පෙන්වා, P අවම වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.



15 (a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4 + 1 = A(x^4-1) + B(x^2+1)(x+1) + C(x^2+1)(x-1) - (x^2-1)$ වන පරිදි A , B හා C නියතයන්ගේ අගයන් සොයන්න. එනයින් $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$ සොයන්න.

(b) (i) $y = x + \cos x \sin^3 x$ විට $\frac{dy}{dx} = 1 + 3\sin^2 x - 4\sin^4 x$ බව පෙන්වන්න.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x\sin^2 x - 4x\sin^4 x)\,dx$ විට,

ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය හා කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදගනිමින්

$I = \frac{1}{8}(\pi^2 - 2)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3cos^2x - 4cos^4x)\, dx$ හා

$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x\, cos^2x - 4x\, cos^4x)\, dx$ වන විට

$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$ බව යොදාගනිමින්, $I = \frac{\pi}{2}J_1 - J_2$ බව පෙන්වන්න. මෙහි I යන්න (i) කොටසේ දී ඇත.

දැන් තවදුරටත් $\frac{d}{dx}(x - sinx\, cos^3x) = 1 + 3cos^2x - 4cos^4x$ බව දී ඇත්නම්,

$J_2 = \frac{1}{8}(\pi^2 + 2)$ බව පෙන්වා J_1 හි අගය අපෝහනය කරන්න.

(c) $\sqrt{x^3+1} = t$ යන ආදේශය යොදාගනිමින් $\int_0^2 \frac{x^8}{\sqrt{x^3+1}}\, dx$ අනුකලය අගයන්න.

16 $l_1 \equiv x - \sqrt{3}y + 1 + k = 0$ හා $l_2 \equiv x + \sqrt{3}y + 1 - k = 0$ සරල රේඛා $(-1, 3)$ හරහා ගමන් කරයි නම් $k = 3\sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. k සඳහා එම අගය ඇති විට $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ අතර කෝණ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ සොයන්න. මේවායින් සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය l ලෙස ගනිමු. $A \equiv (2,3)$ ලක්ෂ්‍යය l සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

A කේන්ද්‍රය වූ ද විශ්කම්භය ඒකක 3 ක් වූ ද S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

A සිට $l_1 = 0$ රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර සොයා එනයින් $(-1, 3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශකවල සමීකරණ අපෝහණය කරන්න.

$l = 0$ මත වූ P ලක්ෂ්‍යයක සිට S වෘත්තයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශක එකිනෙකට ලම්බ වේ. P සඳහා පිහිටීම් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම ලක්ෂ්‍ය වල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. තවදුරටත් එම ස්පර්ශක වලින් වටවූ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

17 (a)

(i) $cos\, A, cos\, B, sin\, A$ හා $sin\, B$ ඇසුරෙන් $cos(A+B)$ ලියා දක්වන්න. $cos\, 3A$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් $cos\, A$ ඇසුරෙන් ලබාගන්න.

(ii) $$\frac{2\cos 3x - 4cos^5x + 3cos^3x}{cosx(1 + sin^2x)} = \lambda \cos 2x + k$$

වන පරිදි λ හා k තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න. එනයින්,

$$f(x) = \frac{2\, cos\, 3x - 4cos^5x + 3cos^3x}{cosx(1 + sin^2x)}$$

හි උපරිම හා අවම අගයන් සොයා $x\epsilon[-\pi, \pi]$ සඳහා $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහන අඳින්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \alpha$ වන පරිදි P ලක්ෂ්‍යයක් ඇත. සුදුසු ත්‍රිකෝණ දෙකක් සළකා **සයින් නීතිය** යෙදීමෙන් PC සඳහා ප්‍රකාශන දෙකක් ලියා දක්වා,

$cot\alpha = cotA + cotB + cotC$ බව පෙන්වන්න.

(c) $x\epsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ සඳහා $2\, tan^{-1}(cos\, x) = tan^{-1}(2cosec\, x)$ සමීකරණය විසඳන්න.

***

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education Ministry of Education Ministry of Education

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2023

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 S II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.
* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

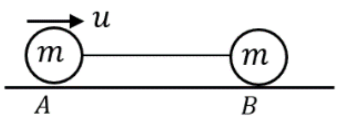
සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න]

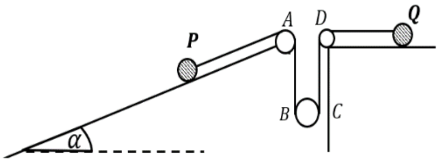
A කොටස

1. ස්කන්ධ m බැගින් වන A හා B අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව ඇත. A අංශුවට $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට u ප්‍රවේගයක් ලබා දෙනු ලැබේ. පසුව ඇතිවන චලිතයේ දී ගැටුමෙන් පසු අංශුවල ප්‍රවේග සොයා නැවත තන්තුව ගැස්සීම හේතුකොටගෙන තන්තුවේ ඇතිවන ආවේගී ආතතිය සොයන්න. අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ.



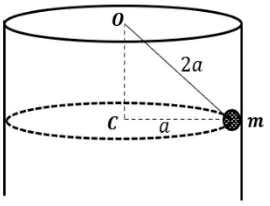
2. එකිනෙකට a පරතරයකින් තිරස් පොළොව මත පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක සිට පිළිවෙළින් P හා Q අංශු දෙකක් එකම මොහොතේ එකිනෙක දෙසට පිළිවෙළින් තිරසට 45^0 හා 60^0 ආනතව u හා v ප්‍රවේගවලින් ගුරුත්වය යටතේ AB හරහා යන සිරස් තලයේ ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. P හා Q එකිනෙක හමුවේ නම් $u : v = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ බව පෙන්වා u හි අගය a හා g ඇසුරින් සොයන්න.

3. රූපයේ PABCDQ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවේ එක් කෙළවරක් තිරසට α ආනත අචල සුමට තලය මත ඇති ස්කන්ධය m වූ P සුමට අංශුවට අමුණා ඇති අතර එය A සුමට අචල කප්පියක් මතින්ද, ස්කන්ධය M වූ සුමට සුචල කප්පියක් වටාද D අචල සුමට කප්පියක් මතින්ද ගොස් සුමට තිරස් තලය මත ඇති ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදාහරී. තන්තුවේ ආතතිය, අංශුවල හා සචල කප්පියේ ත්වරණ සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



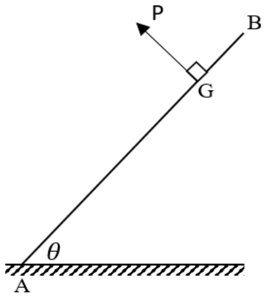
4. ස්කන්ධය M kg වන මෝටර් රථයක් තිරස් සරල රේඛීය මඟක නියත $u\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ප්‍රවේගයෙන් චලිත වන විට එහි උපරිම ජවය $3H$ W වේ. චලිතයට එරෙහි ප්‍රතිරෝධය සොයන්න. ප්‍රතිරෝධය නොවෙනස්ව පවතින විට 30 : 1 ආනත බෑවුමක රථය පහලට චලිත වේ. එවිට එහි එන්ජිම උපරිම ජවයෙන් ක්‍රියා කරන්නේ නම් රථයට ලබාගත හැකි උපරිම වේගය $\frac{90\,Hu}{90H-Mgu}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ බව පෙන්වන්න. $\left(\text{මෙහි } H > \frac{mgu}{90}\right)$

5. රූපයේ පරිදි අරය a වූ අචල සිලින්ඩරයක පියනේ O කේන්ද්‍රයට සම්බන්ධ කරන ලද දිග $2a$ වූ තන්තුවක අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ සුමට අංශුවක් ඈඳා ඇත. අංශුව සිලින්ඩරයේ ඇතුලත සුමට වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ස්පර්ශ වෙමින් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයෙන් O ට සිරස්ව පහලින් පිහිටි C කේන්ද්‍රය වූ තිරස් වෘත්තයක චලිත වේ. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{2mg}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වා සිලින්ඩරය මගින් අංශුව මත ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

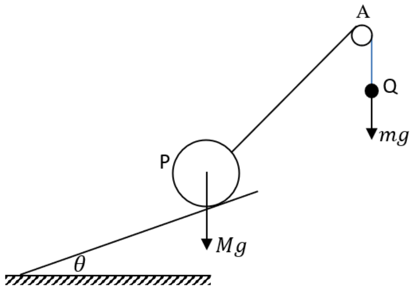


6. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\boldsymbol{i}+\mathbf{j}$, $4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ සහ $6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ වේ. $\boldsymbol{i}$ හා $\mathbf{j}$ සඳහා සුපුරුදු අර්ථ ඇත. D යනු $AD:DB = 1:2$ වන පරිදි AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් D හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. O, D සහ C ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය බවද පෙන්වන්න.

7. රූපයේ දැක්වෙන ඒකාකාර නොවන AB දණ්ඩේ බර W වේ. එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය වන G ලක්ෂ්‍යය AG : GB = 3 : 1 වන පරිදි පිහිටයි. දණ්ඩේ A කෙලවර රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ස්පර්ශව, දණ්ඩ තිරසට θ ආනතව සමතුලිතව පවත්වා ගනුයේ G හි දී දණ්ඩට ගැටගැසූ තන්තුවක් මගින් දණ්ඩට ලම්භකවූ P බලයක් යෙදීමෙනි. දණ්ඩ හා තන්තුව එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. දණ්ඩ මත ක්‍රියා කරන සියලු බල ලකුණු කරන්න. A හිදී දණ්ඩ මත ගෙබිමෙන් ක්‍රියා කරන සම්ප්‍රයුක්ත බලය S විට P හා S හි අගයයන් W හා θ ඇසුරින් සොයන්න.



8. තිරසට θ කෝණයක් ආනත රළු තලයක් මත ස්කන්ධය *M* වූ P නම් ගෝලයක් තබා ඇත. ගෝලයට සම්බන්ධ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් A සුමට අචල කප්පියක් මතින් වැටී අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය *m* වන Q අංශුවක් දරයි. P ගෝලයට සම්බන්ධ තන්තු කොටස යටි අත් සිරසට θ කෝණයක් ආනත වන අවස්ථාවේ ගෝලය පහළට ලිස්සා යාමට සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පිහිටයි. අංශුව හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියන්න.



9. A, B, C යනු $P(A) = 8k$, $P(B) = 2k$ සහ $P(C) = k$; $0 < k < 1$ වන සේ වූ සිද්ධීන් තුනකි. තවද,

$P(A|B) = P(B|C), P(A|C) = P(A)$ සහ $P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$ වේ නම්,

(i) $P(A \cap B), P(B \cap C), P(A \cap B \cap C)$ සොයන්න.

(ii) තවද $P(C \cap A)$, k ඇසුරෙන් සොයා, k හි අගය සොයන්න.

10. නිරීක්ෂණ දහයක් $1004, 1008, 1000, 1008, 996, 992, 1000, 1008, 1008$ සහ 1000 ලෙස දැක්වෙන අතර එක එකක් $1000 - 4x$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර ඇත. x හි අගයන්ගේ මධ්‍යනය සහ සම්මත අපගමනය සොයා, දෙන ලද නිරීක්ෂණ දහයේ මධ්‍යනය සහ සම්මත අපගමනය අපෝහනය කරන්න.

[හත්වැනි පිටුව බලන්න]

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2023

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 S II

B කොටස

✱ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) බැලුනයකට ඈඳූ ඇති P නම් බෝලයක් පොළොව මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් ආරම්භ කර λg ඒකාකාර ත්වරණයෙන් සිරස්ව ඉහළට චලනය වේ. උස h හිදී බැලුනයේ වේගය v වන මොහොතේ P බෝලය බැලුනයෙන් සීරුවෙන් ඉවත්වී ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. බෝලය නැවතත් h උසින් පිහිටන මොහොතේ දී, පොළොවේ O ලක්ෂ්‍යයේ සිට Q නම් තවත් බෝලයක් v ප්‍රවේගයෙන් ම සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න. **ඒ නයින්,**

(i) P බෝලය බැලුනයෙන් ඉවත්වන මොහොතේ එහි ප්‍රවේගය $v = \sqrt{2\lambda gh}$ බවත්,

(ii) P බෝලය ළඟාවන උපරිම උස $\left(h + \frac{v^2}{2g}\right)$ බවත්,

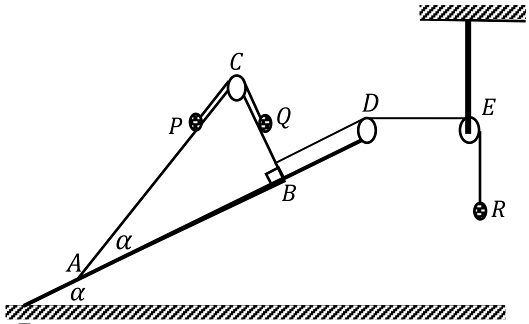
(iii) Q බෝලය ප්‍රක්ෂේපණය කිරීමෙන් පසු බෝල දෙකම ගැටීමට ගතවන කාලය $\sqrt{\frac{h}{8\lambda g}}$ බවත් පෙන්වන්න.

(b) දකුණු දිශාවට v ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරන A නැවකට P නම් බෝට්ටුවක් දකුණින් α කෝණයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට ගමක් කරන බව පෙනෙන අතර, Q නම් තවත් බෝට්ටුවක් උතුරින් α කෝණයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට ගමන් කරන බව පෙනේ. පොළොවට සාපේක්ෂව, P බෝට්ටුව $3v$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ද Q නැව v ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ද ගමන් කරයි. A හා P හි සහ A හා Q හි චලිත සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ එකම රූප සටහනේ ඇඳ දක්වන්න.

(i) A ට සාපේක්ෂව P හා Q හි වේගය සොයන්න.

(ii) ආරම්භයේ දී A නැව P සිට නැගෙනහිර දිශාවට 24 km ක දුරින් ද Q සිට උතුරු දිශාවට 6 km ක දුරින් ද පිහිටයි නම් A හා P අතර දුර කෙටිතම වන විට A හා Q අතර දුර $\frac{48\cos^2\alpha}{\sqrt{9-\sin^2\alpha-\cos\alpha}}$ බව පෙන්වන්න.

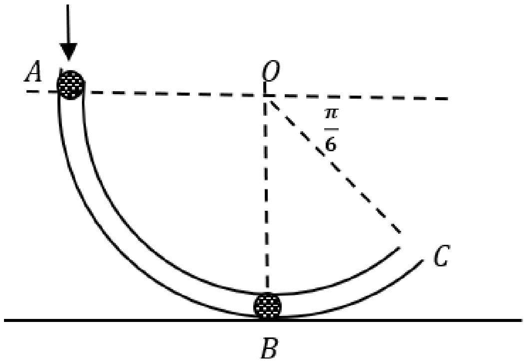
12. (a) රූපයේ ABC ත්‍රිකෝණය $B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ වන, AB අඩංගු මුහුණත තිරසට α $\left(< \frac{\pi}{4}\right)$ ආනත තලයක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වූ අවල සුමට ඒකාකාර කූඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුලින් වූ සිරස් හරස් කඩක් වේ. AC හා BC රේඛා ඒවා අඩංගු මුහුණත් වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. ආනත තලයේ D හි සවි කර ඇති කුඩා අවල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් කූඤ්ඤයට ද



අනෙක් කෙළවර E හි වූ අවල සුමට කප්පියක් මතින්ද දමා ස්කන්ධය m වූ R අංශුවකට ඈඳූ ඇත. කූඤ්ඤයේ C හි සවිකර ඇති අවල සුමට කප්පියක් මතින් දමා ඇති තවත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් AC මුහුණත මත වූ ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවකටද අනෙක් කෙළවර BC මුහුණත මත වූ ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවකටද ගැට ගසා ඇත. ආනත තලය තිරස් තලයට හමුවන ලක්ෂ්‍යය F වේ. $AF = a$ ලෙස තන්තු තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. කූඤ්ඤය F වෙත ලඟා වීම ප්‍රථමයෙන් සිදුවෙතැයි උපකල්පනය කර ඒ සඳහා ගතවන කාළය සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. (DE තන්තු කොටස තිරස් වේ)

[අටවැනි පිටුව බලන්න]

(b) අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වන වෘත්තාකාර චාපයක හැඩය ඇති සුමට සිහින් බටයක් රූපයේ පරිදි AO රේඛාව තිරස්වද, බටයේ පහලම ලක්ෂ්‍යය වන B ලක්ෂ්‍යය අචල තිරස් පොලොවක් ස්පර්ශ කරමින්ද, සිරස් තලයක සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ සුමට P අංශුවක් A කෙළවරේ දී බටය තුලට සීරුවෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. OP රේඛාව OA සමග $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවේ ප්‍රවේගය v නම් $v^2 = 2ga\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.



P අංශුව B වෙත ලගා වන විට බටය තුල B හි නිසලව තබා ඇති ස්කන්ධය λm වූ සුමට Q නම් තවත් අංශුවක් හා ගැටී හාවේ. ගැටුමට මොහොතකට පෙර P අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{2ga}$ බව පෙන්වන්න.

ගැටුමෙන් පසු සංයුක්ත අංශුව OB සමග $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right)$ කෝණයක් සාදන විට එහි ප්‍රවේගය u නම්, $u^2 = 2ga\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \cos\theta - 1\right)$ බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත අංශුව බටය හැර නොගොස් දෝලන චලිතයක යෙදීම සදහා $\lambda(\lambda + 2) > 1$ විය යුතු බව පෙන්වන්න. තවද $\lambda = \sqrt{2} - 1$ නම් සංයුක්ත අංශුව ස්වකීය දෝලන චලිතයේ පලමු ගතික නිශ්චලතාවයට පත්වන මොහොතේ බටයෙන් අංශුව මත $\sqrt{\frac{3}{2}}mg$ විශාලත්වයෙන් යුත් ප්‍රතික්‍රියාවක් ඇති කරන බවද පෙන්වන්න.

13. ස්වභාවික දිග $3l$ වූ සිහින් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ දුන්නක්, එහි පහළ කෙළවර O අචල වන සේ සිරස් ව සිටුවා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එහි ඉහළ කෙළවරට ඈඳ තිබේ. P මත සිරස්ව ඉහලට යෙදෙන නියත 3mg බලයක් මගින් P අංශුව O ට සිරස් ව $4l$ ක් ඉහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යයක සමතුලිතව ඇත. දුන්නෙහි ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $6mg$ බව පෙන්වන්න. A සිට සීරුවෙන් අංශුව මුදාහල විට අංශුව සිරස් චලිතයක් දක්වන්නේ යැයි සලකා දුන්නේ දිග x වනවිට $3l < x < 4l$ සඳහා $\ddot{x} + \frac{2g}{l}\left(x - \frac{5l}{2}\right) = 0$ බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න. මෙහි $X = x - \frac{5l}{2}$ හා $\omega^2 = \frac{2g}{l}$ වේ.

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම චලිතයේ විස්තාරය c සොයන්න. එනයින්, O ට සිරස් ව $3l$ ඉහළින් වූ B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ වේගය සොයන්න.

B හිදී නිසලව තිබූ ස්කන්ධය m වූ තවත් Q අංශුවක් P හා සරලව ගැටී හාවේ. ඉන්පසු B හිදී සංයුක්ත අංශුව පහළට චලනය ආරම්භ කරන වේගය $\sqrt{gl}$ බව පෙන්වන්න.

D යනු සංයුක්ත වස්තුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගෙන B සිට D දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා දුන්නේ දිග y යන්න $\ddot{y} + \frac{g}{l}(y - 2l) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. මෙහි $(2 - \sqrt{2})l < y < 3l$ වේ.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $y = 2l + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ බව උපකල්පනය කරමින්, α, β හා ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනයින්, වස්තුව B සිට D දක්වා යෙදෙන සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය හා විස්තාරය සොයන්න.

14. (a) O මූලය අනුබද්ධයෙන් A ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ වේ. B යනු $OB = 10$ හා $B\hat{O}A = 60^0$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය වේ. මෙහි $\boldsymbol{i}$ හා $\boldsymbol{j}$ සඳහා සුපුරුදු අර්ථ ඇත. $\alpha \neq 0$ විට $\overrightarrow{OB} = \alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}$ ලෙස ගෙන $\overrightarrow{OB}$ සොයන්න.

(i) C යනු OB මත $\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{5}{2}\boldsymbol{j}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $OC\!:\!CB$ අනුපාතය සොයා OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D නම් $\overrightarrow{BD}$ ලබාගන්න.

(ii) E යනු $\overrightarrow{AE} = \frac{10}{17}\overrightarrow{AC}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයක් නම් $\overrightarrow{BE}$ සොයා එමගින් B, E, D ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය වන බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ AB හා DC එකිනෙකට සමාන්තර වන අතර $AB \perp BD$, $D\hat{A}B = 60^0$ හා $C\hat{A}B = 30^0$ වේ. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}$ පාද ඔස්සේ පිළිවෙළින් μp, $2p$, $3\sqrt{3}p$ හා λp බල ක්‍රියාකරයි.

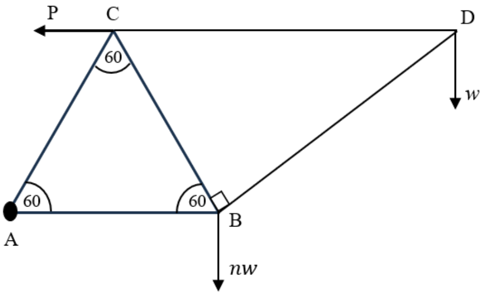
(i) λ හා μ හි කිසිම අගයක් සඳහා මෙම පද්ධතිය සමතුලිත නොවන බව පෙන්වන්න.

(ii) පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය AD ඔස්සේ වේ නම් λ හා μ හි අගයන් සොයන්න.

(iii) දැන් පද්ධතියට $\overrightarrow{CD}$ දිශාවට D හරහා αp බලයක් හා එම තලයේම ක්‍රියාකරන G යුග්මයක් එකතු කරනු ලැබේ. නව සම්ප්‍රයුක්තය DB ඔස්සේ වේ නම් α හා G හි අගයන් සොයන්න.

15. (a) AB, BC, CD හා DA සමාන දිගැති ඒකාකාර දඬු හතරෙහි බර පිළිවෙලින් $2W, 2W, 3W$ හා W වේ. ඒවා A, B, C, D අන්ත වලදී සුමට ලෙස අසව් කර තැනූ චතුරශ්‍රය A ශීර්ෂයෙන් නිදහසේ එල්ලා තබා එහි සමචතුරශ්‍ර හැඩය පවතින අයුරින් AB හා BC දඬු දෙකෙහි ගුරුත්ව කෙන්ද්‍ර සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳ ඇත. පද්ධතිය සමතුලිතව එල්ලී ඇති විට තන්තුවේ ආතතිය $9W$ බව පෙන්වන්න. B හා C සන්ධි වල ප්‍රතික්‍රියා වල විශාලත්ව ද සොයන්න.

(b) රූපයේ පරිදි AB, BC හා AC සමාන දිගැති සැහැල්ලු දඬු 3 ක් ද BD හා CD ලෙස වෙනත් අසමාන දිගැති සැහැල්ලු දඬු දෙකක් ද ලෙස දඬු පහකින් සැදි රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුචල ලෙස අසව්කර ඇත. B හා D හිදී පිළිවෙලින් nw හා w භාර සහිතව AB හා CD තිරස්ව, රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව පවත්වාගනුයේ C හිදී යොදා ඇති P තිරස් බලය මගිනි. $P = \left(\frac{2n+5}{\sqrt{3}}\right)w$ බව පෙන්වන්න. **බෝ අංකනය** යෙදීමෙන්, සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් ලෙස වෙන්කර දක්වමින් ඒවායේ විශාලත්ව සොයන්න. BC දණ්ඩට දැරිය හැකි උපරිම ආතතිය $10\sqrt{3}\,w$ නම් $n \leq 14$ විය යුතු බව සාධනය කරන්න.

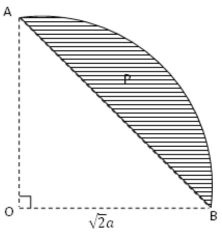


16. (a)

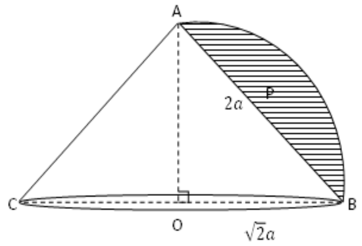
(i) අරය r වන, කේන්ද්‍රයේ 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, ඒකාකාර කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$ දුරින් පිහිටන බව අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න.

(ii) උස h හා අරය a වන ඒකාකාර ඍජු වෘත්ත කුහර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි ශීර්ෂයේ සිට $\frac{2}{3}h$ දුරින් පිහිටන බව අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න.

(b) අරය $\sqrt{2}\,a$ හා කේන්ද්‍රයේ $\frac{\pi}{2}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන ඒකාකාර කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයකින් රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට OAB ත්‍රිකෝණාකාර කොටස ඉවත්කළ පසු ඉතිරිවන P ආස්තර කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට එහි සමමිතික අක්ෂය මත $\frac{4a}{3(\pi-2)}$ දුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



(c) ආධාරකයේ අරය $\sqrt{2}a$ හා ඇල උස $2a$ වන ඒකාකාර කුහර කේතුවක ඇල උස දිගේ ඉහත P ආස්තරය සම්බන්ධ කිරීමෙන් රූපයේ ආකාරයේ සංයුක්ත වස්තුවක් තනා ඇත. කේතුවේ ස්කන්ධය P ආස්තරයේ ස්කන්ධය මෙන් පස් ගුණයකි. OB හා OA පිළිවෙළින් X හා Y අක්ෂය ලෙස ගෙන සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. A වලින් මෙම වස්තුව එල්ලූ විට OA සිරස සමඟ $\tan^{-1}\left[\frac{5\pi-8}{2(9\pi-19)}\right]$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.



17. (a) ළමා රෝහලක ඇති වාර්තා විශ්ලේෂණය කිරීමේදී රෝහලේ ප්‍රතිකාර ගන්නා පිරිමි ළමයින් අතරින් කෙනෙක් සසම්භාවීව තෝරාගත් කළ පහත සඳහන් A, B, C සිද්ධි පිළිබඳ සම්භාවිතා කිහිපයක් අනාවරණය විය.

A: ළමයාට ඇදුම රෝගය ඇත

B: ළමයාට අධි රුධිර පීඩනය ඇත

C: ළමයාට දියවැඩියාව ඇත

තවද සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ස්වායත්ත බවද $P(B) = 0.3, P(A \cup B) = 0.37$ සහ $P(C) = 0.2$ බවද දී ඇත.

(i) $P(A) = 0.1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $P(B'/A')$ සොයන්න. A' හා B' යනු පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි වේ.

(iii) තෝරාගත් ළමයා දියවැඩියාව ඇති නමුත් අධි රුධිර පීඩනයවත්, ඇදුම රෝගයවත් නැතිවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iv) තෝරාගත් ළමයා ඉහත සඳහන් රෝගී තත්ත්ව වලින් එකකින් පමණක් පෙළෙන බව දී ඇත්නම්, එය ඇදුම රෝගය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) ආයතනයක සේවකයින් 120 දෙනෙකු සේවයට පැමිණීම සඳහා ගමන් කරන දුර ආසන්න කිලෝමීටරයට පහත සටහනේ දැක්වේ.

දුර	සේවකයින් සංඛ්‍යාව
0 -10	10
10-20	19
20-30	43
30-40	25
40-50	8
50-60	6
60-70	5
70-80	3
80-90	1

(i) $y_i = \frac{1}{10}(x_i - 45)$ යන පරිණාමනය භාවිතයෙන් ඉහත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

(ii) කි.මී. 50 කට වඩා දුර සිට පැමිණෙන සේවකයින්ව, ඔවුනට වඩා ආසන්න ආයතනයේ වෙනත් ශාඛාවලට මාරු කිරීමට ආයතනය තීරණය කරයි .මාරු කිරීම් සිදුකළ පසු ඉතිරි වන සේවකයින් සේවයට පැමිණීම සඳහා ගමන් කරන දුරෙහි අන්තර් චතුර්ථක පරාසය නිමානය කරන්න.

***

All Rights Reserved

Confidential

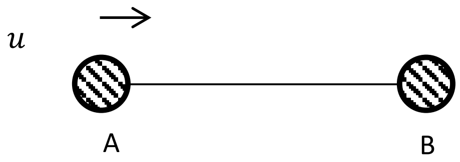
Ministry of Education

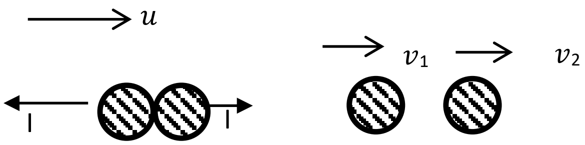
Support Seminar Paper-2023

10- Combined Mathematics II

Marking Scheme

01.





$\overrightarrow{I = \Delta MV}$ $\quad$ *for the system*

$0 = m(v_1 - u) + m(v_2 - 0)$ $\quad$ (05)

$v_1 + v_2 = u$ ——— ①

$v_1 - v_2 = e(u - 0)$ $\quad$ (05)

$v_1 - v_2 = eu$ ——— ②

① + ② $\quad \Longrightarrow v_2 = \frac{u}{2}(1 + e)$

① - ② $\quad \Longrightarrow v_1 = \frac{u}{2}(1 - e)$

$\rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \quad \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_3$

For system $A :\rightarrow I = \Delta mv$ $\quad$ (05)

$0 = m(v_3 - v_1) + m(v_3 - v_2)$

$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2}$

$v_3 = \frac{\frac{u}{2}.2}{2}$

$= \frac{u}{2}$

For A $\quad I = \Delta mv \rightarrow$ $\quad$ (05)

$I = m(v_3 - v_1)$

OR for partical B $\leftarrow$

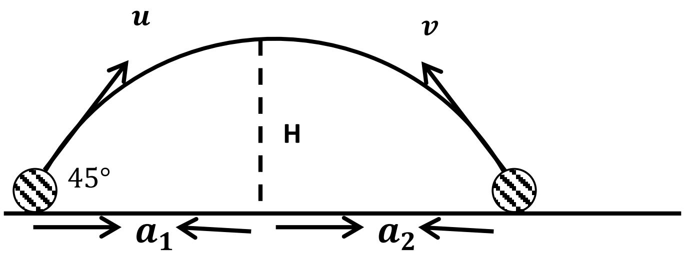
$I = m\big(-v_3 - (-v_2)\big)$

$= \frac{mue}{2}$ $\quad$ (05)

$= m\left(\frac{u}{2} - \frac{u}{2}(1-e)\right)$

$= \frac{mue}{2}$

Q2



For motion upto B

$A \uparrow \quad v = u + at$ for B $\uparrow v = u + at$ (05)

$0 = u \sin 45° - gt$ $\quad 0 = v \cos 60° - gt$

$t = \frac{u \sin 45°}{g}$ (05) $\quad t = \frac{v \cos 60°}{g}$

By equating t

$$\frac{u \sin 45°}{g} = \frac{v \cos 60°}{g}$$ (05)

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}v}{2}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{3}v}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \quad u : v = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

$a_1 + a_2 = a$ (05)

$$\frac{u \cos 45° . u \sin 45°}{g} + \frac{v \cos 60° . v \sin 60°}{g} = a$$

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{\sqrt{3}v^2}{4g} = a$$

$$2u^2 + \sqrt{3}v^2 = 4ag$$

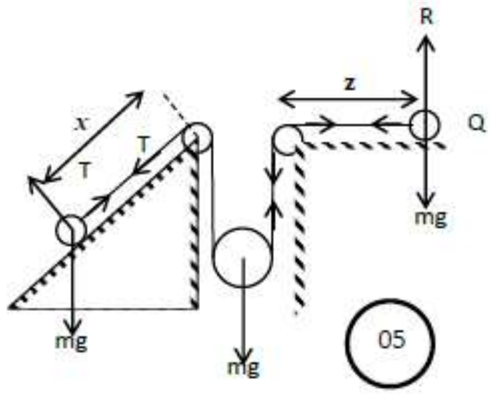
$$2u^2 + \sqrt{3}\,\frac{2}{3}\,u^2 = 4ag$$

$6u^2 + 2\sqrt{3}\, u^2 = 12ag$

$u^2 = \frac{6\, ag}{(3+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}\ ag}{\sqrt{3}\ +1}$ (05)

$u = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\ \ ag}{\sqrt{3}+1}}$

3)



$x + 2y + z = l$

$\ddot{x} + 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0$

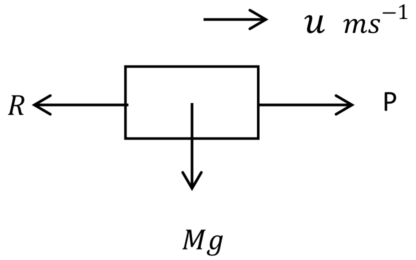
$\ddot{y} = -\frac{(\ddot{x}+\ddot{z})}{2}$ ——— (1) (05)

For P ↙ $mg\sin\propto -T = m\ddot{x}$ ——— (2) (05)

For $Q \leftarrow T = -m\ddot{z}$ ——— (3) (05)

For $R \downarrow M - 2T = M\ddot{y}$ ——— (4) (05)

04.



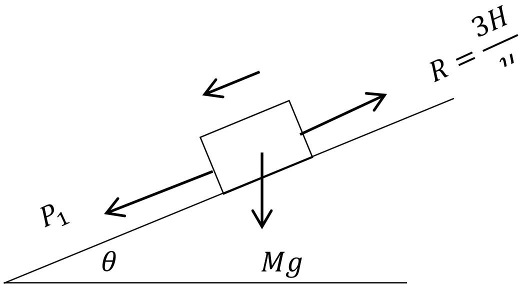
$P - R = M \times O$

$P = R$

$Pu = 3H \Rightarrow Ru = 3H$

$R = 3H \Rightarrow Ru = 3H$

$R = \frac{3H}{u} N$ (5)



$\sin\theta = \frac{1}{30}$

↙ $P_1 - \mathrm{R} + \mathrm{Mg}\sin\theta = M \times O$ (10)

$P_1 = \mathrm{R} - \mathrm{Mg} \times \frac{1}{30} = \frac{3H}{u} - \frac{Mg}{30}$ (5)

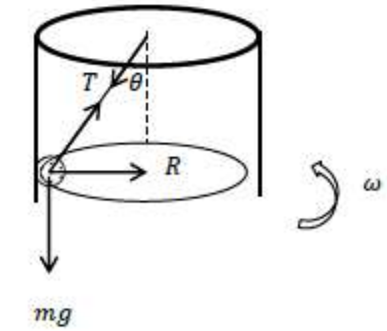
$P_1\mathrm{V} = 3\mathrm{H}$ (5)

$\left(\frac{3H}{u} - \frac{Mg}{30}\right)\mathrm{V} = 3\mathrm{H}$

$V = \frac{3H \times 30u}{90H - Mgu}\ ms^{-1}$

(5)

(05)



m

$\uparrow F = ma$

$\uparrow T\cos\theta = mg$

$T = \frac{2mg}{\sqrt{3}}$ (05)

$Sin\theta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ (05)

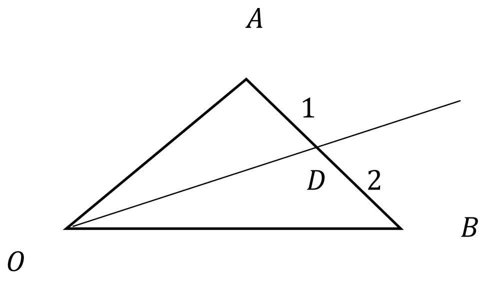
$\rightarrow F = ma$

$R + T\sin\theta = m.a\omega^2$ (05)

$R = ma\omega^2 - \frac{2mg}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$

$R = m\frac{(\sqrt{3}a\omega^2 - g)}{\sqrt{3}}$ (05)

06.



$\overrightarrow{OD} = \dfrac{2\times\overrightarrow{OA} + 1\times\overrightarrow{OB}}{2+1}$ (5)

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{2(\underline{i}+\underline{j}) + 1(4\underline{i}+\underline{j})}{3}$

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{6\underline{i}+3\underline{j}}{3}$

$\overrightarrow{OD} = 2\underline{i} + \underline{j}$ (5)

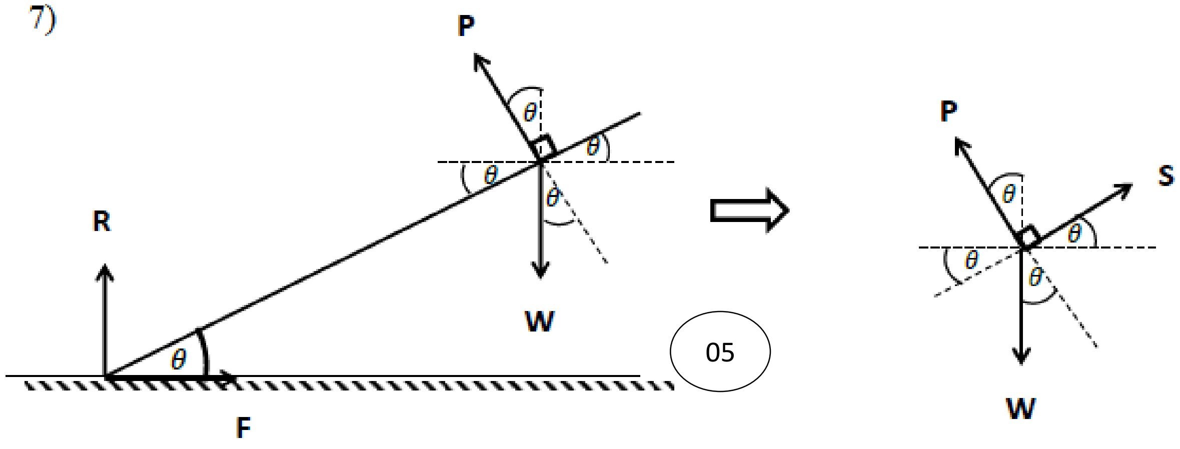
$\overrightarrow{OC} = 6\underline{i} + 3\underline{j} = 3(2\underline{i} + \underline{j})$ (5)

$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OD}$ (5)

$\therefore OC \parallel OD (\because point\ O\ is\ common)$

$\therefore O, C\ and$ D Collinear. (5)

7)



05

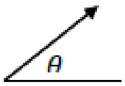
$$\frac{S}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{S}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = \frac{S}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$ 10

$$\frac{S}{\sin\theta} = \frac{P}{\cos\theta} = W$$ 05

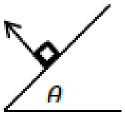
$S = W\sin\theta$

$P = W\cos\theta$

By considering the equibbrium



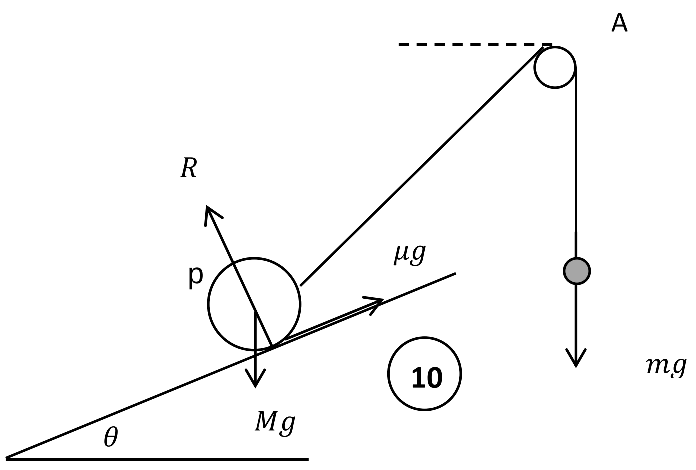
$S = W\sin\theta$ 05



$P = W\cos\theta$

05

8.



P අංශුවට $\longrightarrow$ $\mu R\cos\theta + T\sin\theta - mg\sin\theta = 0$ (5)

$Q \downarrow mg - T = 0$ (5)

$T = mg$

$P \uparrow R\cos\theta + T\cos\theta + \mu R\sin\theta - Mg = 0$ (5)

Q (9) $\because$ $P(A/B) = P(B/C) = 0$

$P(A\cap B) = \emptyset$ and $P(B\cap C) = \emptyset$

$\because$ A, B mutually exclusive and B, C mutually exclusive.

$A\cap B\cap C = (A\cap C)\cap B = \emptyset$ (05)

$P(A\cap B\cap C) = 0$

$\because$ $P(A/C) = P(A) = P(A\cap C) = P(A).P(C) = 3k^2$ (05) (05)

$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

$= 3k + 2k + k - 0 - 0 - 3k^2 + 0$

$\frac{11}{12} = 6k - 3k^2$ (05)

$\therefore$ $36k^2 - 72k + 11 = 0$

$(6k-1)(6k-11) = 0$

$\because$ $6k - 11 \neq 0$, $k = \frac{1}{6}$ (05)

Q (10)

x	-2	-1	0	1	2
f	4	1	3	1	1
fx	-8	-1	0	1	2
fx^2	16	1	0	1	4

05

$\overline{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = -\frac{6}{10} = -0.6$

05

$\sigma^2 x = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \overline{x}^2 = \frac{22}{10} - 0.36 = 1.84$

05

$Let\ y = 2000 - 4x$

$Then\ \overline{y} = 2000 - 4\overline{x} = 2000 + 2.4$

05

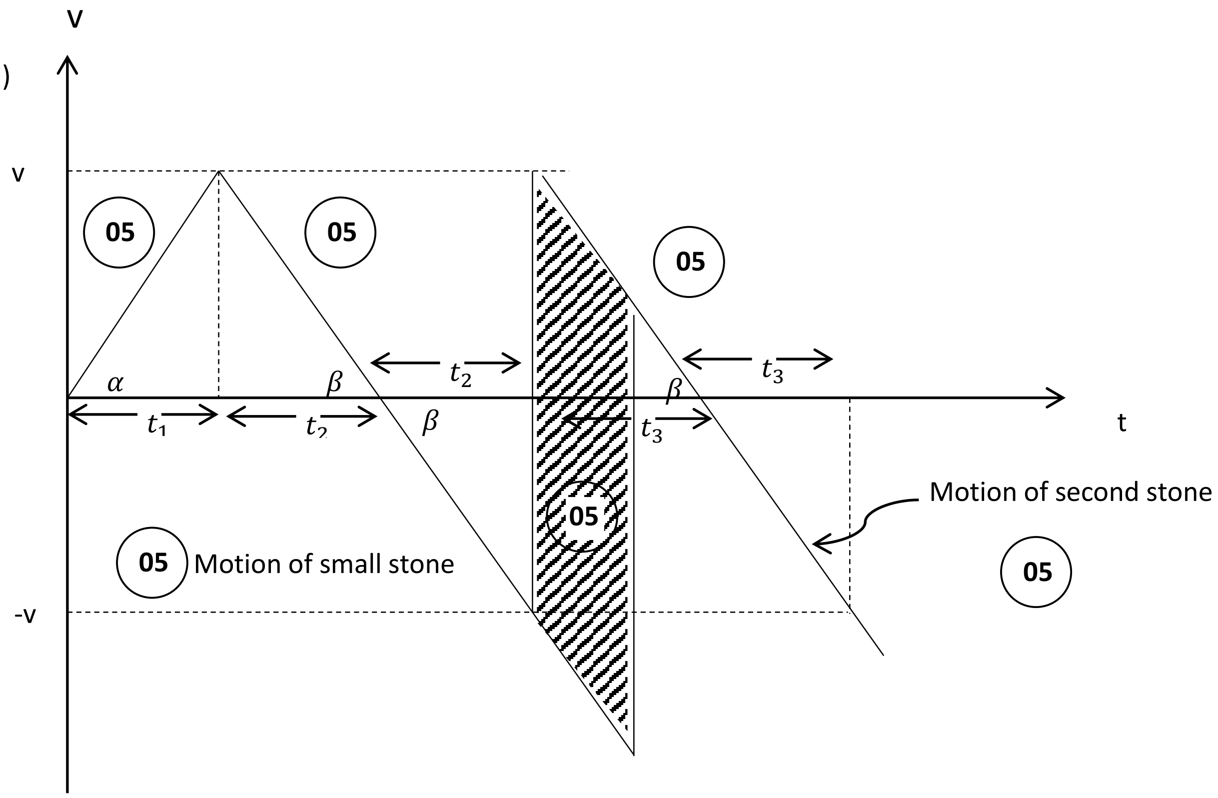
$= 2002.4$

$\sigma^2 y = 4^2 \sigma^2 x = 16 \times 1.84$

$\sigma y = \sphericalangle \ \sqrt{1.84}$

05

Q.11(a)



(ii) For the motion of small stone

$tan\alpha = \lambda g = \frac{v}{t_1} \Rightarrow v = \lambda g t_1$ **05**

$H = \frac{1}{2} t_1 v$

$H = \frac{1}{2} \frac{v}{\lambda g} v \ \Rightarrow v = \sqrt{2\lambda gh}$ **05**

(iii) Height attained by particle small

$H + \frac{1}{2} v t_2 \ where \ g = \frac{v}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{v}{g}$ **05**

$H + \frac{1}{2}.v.\frac{v}{g}$ **05**

$H + \frac{v^2}{2g}$

(iv) Time taken to collide is equal to t

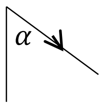
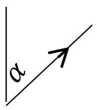
$\frac{1}{2}(2v + 2v).t = h$ **(05)**

$t = \frac{h}{2v}$

$= \frac{h}{2\sqrt{2\lambda gh}}$ **(05)**

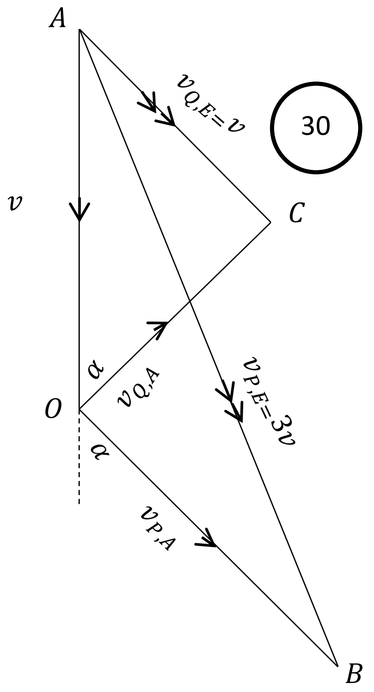
$= \sqrt{\frac{h}{8\lambda g}}$

Question 11 (b)

$v_{A,\ E} = \downarrow v$ $v_{P\ \ A} =$  $v_{Q\ \ A} =$ 

$v = 3v$ $v_{Q,\ E} = v$ --------------(5)

By Relative velocity principle



30

$v_{P,E} = v_{P,A} + v_{A,E}$

$3v = \searrow + \ v \downarrow$ ----------------(5)

$v_{Q,E} = v_{Q,A} + v_{A,E}$

$v = \nearrow \ + \downarrow v$ ----------------(5)

$OAB\ for\ the\ motions\ of\ A\ and\ P$

$OAC\ for\ the\ motions\ of\ A\ and\ Q$

Let $v_{P,A} = v_1$

$v_{Q,A} = v_2$

$(v + v_1 cos\alpha)^2 + (v_1 sin\alpha)^2 = (3v)^2$

$v_1{}^2 + 2vv_1 cos\alpha + v^2 = 9v^2$ ---------------(5)

$v_1{}^2 + 2vv_1 cos\alpha + v^2 cos^2\alpha + v^2 sin^2\alpha = 9v^2$

$(v_1 + vcos\alpha)^2 = 9v^2 - v^2 sin^2\alpha$

$v_1 + vcos\alpha = v\sqrt{9 - sin^2\alpha}$ ---------------(5)

$v_1 = v(\sqrt{9 - sin^2\alpha} - cos\alpha)$

$v_{P,A} = v(\sqrt{9 - sin^2\alpha} - cos\alpha)$ --------------(5)

$(v - v_2 cos\alpha)^2 + v_2 sin^2\alpha = v^2$

$v^2 + {v_2}^2 - 2vv_2 cos\alpha = v^2$

$(v_2 - vcos\alpha)^2 + v^2 sin^2\alpha = v^2$

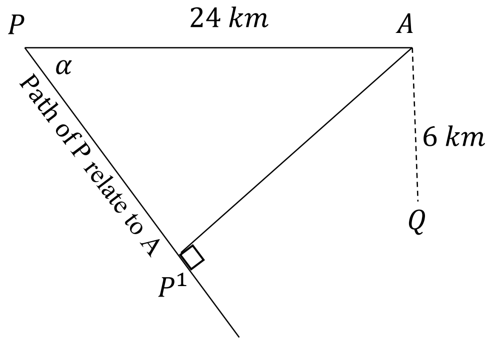
$v_2 = v\{\sqrt{1 - sin^2}\alpha + cos\alpha\}$

$v_{Q,A} = v\{\sqrt{1 - sin^2}\alpha + cos\alpha\}$ ---------(5)

$v_{Q,A} = 2vcos\alpha$

═ ═

(ii)



10

$cos\alpha = \frac{PP^1}{24}$

$PP^1 = 24cos\alpha$ ------------(5)

Time taken $= \frac{\text{Distance travelled by P relatedto A}}{v_{P,A}}$

$= \frac{24cos\alpha}{v\{\sqrt{9 - sin^2\alpha} - cos\alpha\}}$ ---------------------(5)

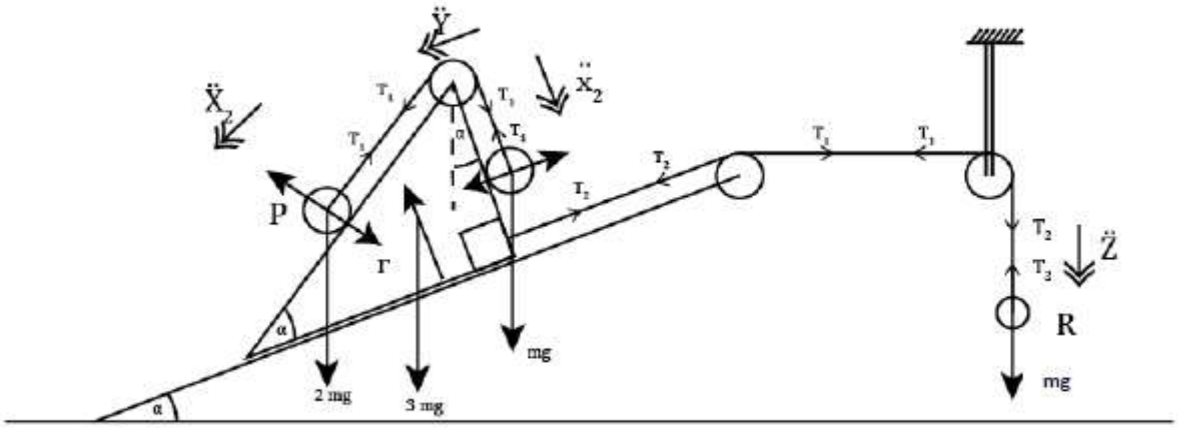
Distance travelled by Q at this time $= v_{P,A} \times t$

$= 2vcos\alpha \times \frac{24cos\alpha}{v\{\sqrt{9 - sin^2\alpha} - cos\alpha\}}$

$= \frac{48cos^2\alpha}{\sqrt{\{\sqrt{9 - sin^2\alpha} - cos\alpha\}}}$ ---------------------------(5)

═ ═

(12) a

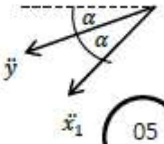
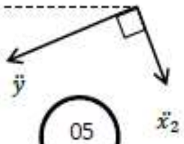


$x_1 + x_2 = l_1$

$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$ ——— (1) (05)

$y + z + k = l_2$

$\ddot{y} + \ddot{z} = 0$ ——— (2) (05)

$a_{YE} = \swarrow \ddot{y}$ $\quad a_{RE} = \downarrow \ddot{z}$ $\quad a_{PE} =$  (05) $\quad a_{QE} =$  (05)

$F = ma$

For $P \swarrow 2mg \sin 2 \propto - T_1 = 2m(\ddot{x}_1 + \ddot{y} \cos \propto)$ ——— (3) (10)

For $Q_1 \searrow mg \cos \propto - T_2 = m(\ddot{x}_2)$ ——— (4) (10)

For $R_1 \downarrow mg - T_2 = m(\ddot{z})$ ——— (5) (10)

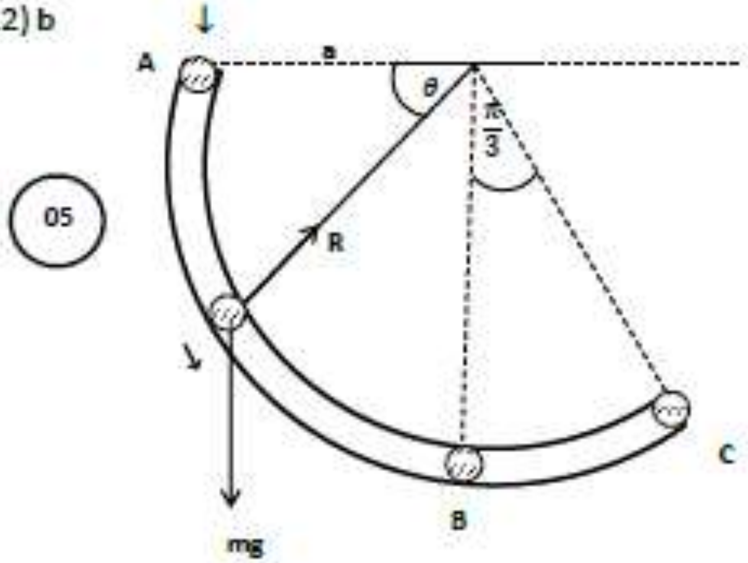
For the system P and Q

$T_2 - 6mg \sin \propto = 2m(-\ddot{y} - \ddot{x}_1 \cos \propto) = 3m(\ddot{y}) + m(-\ddot{y})$ ——— (6) (20)

For $\quad R \downarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = 0 + \frac{1}{2}\ddot{z}t^2$ ——— (7) (05)

(12) b

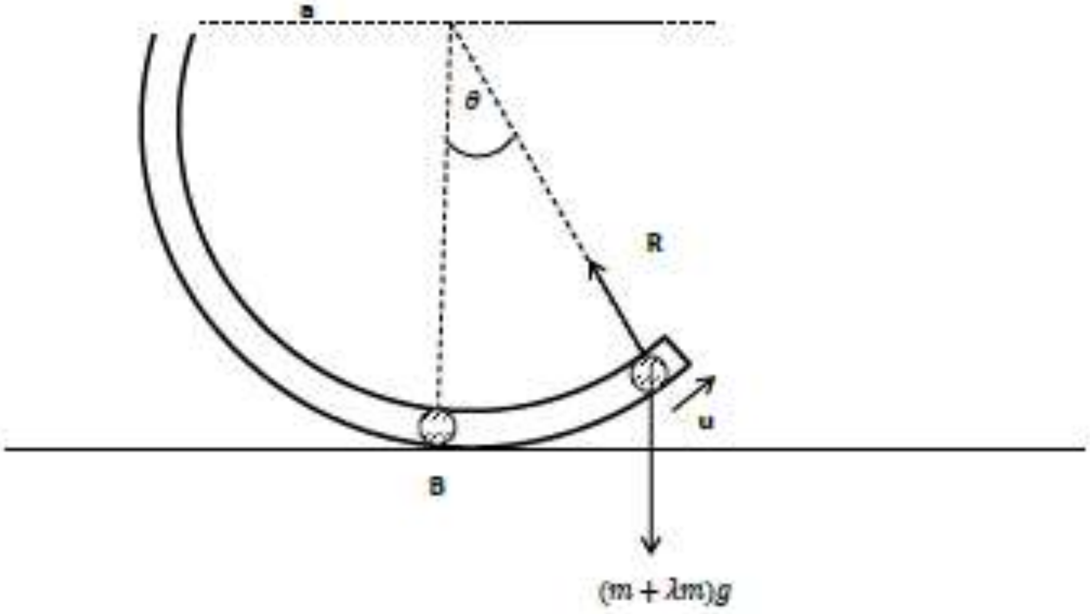


$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgasin\theta$ (05)

$v^2 = 2gasin\theta$ (05)

$v_1^2 = 2ga\,sin\frac{\pi}{2}$

$v_1 = \sqrt{2ga}$ (05)



$\rightarrow v_1 \rightarrow 0$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow v_2 \; \rightarrow v_2$

$\rightarrow I = \Delta mv$

$O = (m + \lambda m)v_2 - mv_1$ (05)

$v_2 = \frac{\sqrt{2ga}}{(1+\lambda)}$ (05)

$\frac{1}{2}(m + \lambda m)v_2^2 = \frac{1}{2}(m + \lambda m)u^2 + (m + \lambda m)g(a - a\cos\theta)$ (15)

$\frac{2ga}{2(1+\lambda)^2} = \frac{u^2}{2} + ga(1 - \cos\theta)$

$u^2 = \frac{2ga}{(1+\lambda)^2} - 2ga(1 - \cos\theta) = 2ga\left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \cos\theta - 1\right)$

$\text{when } u = 0 \; , \; \theta = \alpha$

$\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \cos\alpha - 1 = 0$

$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{(1+\lambda)^2}$ (05)

$\text{when } \alpha < \frac{\pi}{3}$ (05)

$\cos\alpha > \cos\frac{\pi}{3}$

$1 - \frac{1}{(1+\lambda)^2} > \frac{1}{2}$

$\frac{1}{(1+\lambda)^2} < \frac{1}{2}$

$(1 + \lambda)^2 > 2 \rightarrow$

$1 + 2\lambda + \lambda^2 > 2$

$\lambda(\lambda + 2) > 1$ (05)

$\lambda = \sqrt{2} - 1$

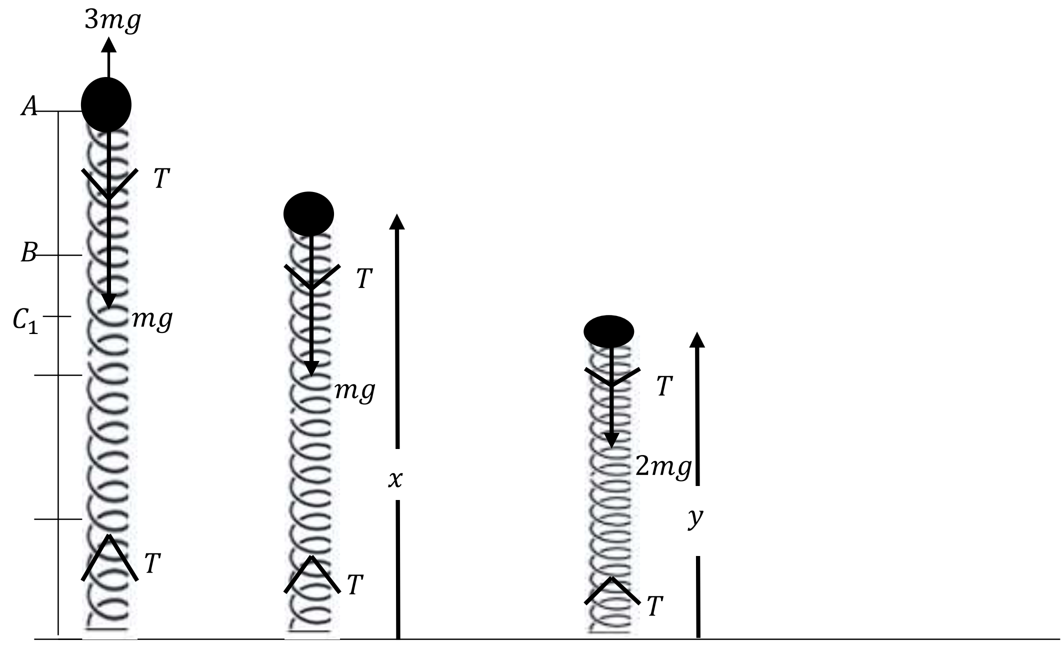
$\nwarrow F = ma$

$R - (m + \lambda m)g\sin\alpha = (m + \lambda m)\frac{v^2}{a}$ (05)

$R = m(1 + \lambda)g\sin\frac{\pi}{3}$

$R = \sqrt{2}mg \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}mg$ (05)

13.



When the particle at A

$\uparrow\ 3mg - mg - T = 0$

$2mg = \frac{\lambda l}{3l}$ (05)

$\lambda = 6mg$

15

When the partical lies between at B

$\uparrow\ -mg - T = m\ddot{x}$ (05)

$-mg - \frac{6mg(x-3l)}{3l} = m\ddot{x}$ (10)

$\ddot{x} = -\frac{2g}{l}\left(x - \frac{5l}{2}\right)$ (05)

$\ddot{x} = -\omega^2 X$ (05)

$At\ center\ X = 0\ \leftrightarrow x = \frac{5l}{2}$

$\dot{x} = \dot{x} - \frac{5l}{2}$ (10)

$\ddot{X} = \ddot{x}$ (05)

30

$At\ A\ x = \frac{3l}{2}, \dot{x} = 0$

$\dot{x}^2 = \omega^2(C^2 - X^2)$ (05)

$0 = \omega^2\left(C^2 - \left(\frac{3l}{2}\right)^2\right)$ $\therefore Amplitude\ C = \pm\frac{3l}{2}$ (05)

$At\ B\ \dot{X}_B{}^2 = \frac{2g}{l}\left(\frac{9l^2}{4} - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)$ $\dot{X}_B = 2\sqrt{gl}$ (05) 15

$After\ Collision\ \downarrow I = \Delta mv$

$0 = m\left(+v - 2\sqrt{gl}\right) + m(v - 0)$ (05)

$V_B = \sqrt{gl}$ (05)

10

$When\ the\ partical\ lies\ between\ B\&D$

$\uparrow \underline{f} = m\underline{a}$

$T - 2mg = 2m\ddot{y}$ (05)

$\frac{6mg(3l-y)}{3l} - 2mg = 2m\ddot{y}$

(05)

$\ddot{y} = -\frac{g}{l}(y - 2l)$ (05) 15

$At\ the\ center\ \ddot{y} = 0 \qquad y = 2l$

$At\ B; t = 0, y = 3l\ , \dot{y} = \sqrt{gl}$

$y = 2l + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$

(05) (05)

$3l = 2l + \alpha \quad \leftrightarrow \quad \alpha = l$

$\dot{y} = -\alpha\omega \sin \omega t + \beta\omega \cos \omega t$ 05

$-\sqrt{gl} = \beta\omega$ 05

$\ddot{y} = -\alpha\omega^2 \cos \omega t - \omega^2 sin\omega t$ 05

$= -\omega^2(y - 2l)$ 05

$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\beta = -l$

05 05

40

At the end of the amplitude $\dot{y} = 0$

$\tan \omega t = -1$ 05 $\leftrightarrow$ $\omega t = \frac{3\pi}{4}$ 05

$y = 2l + lcos\frac{3\pi}{4} - lsin\frac{3\pi}{4}$ 05

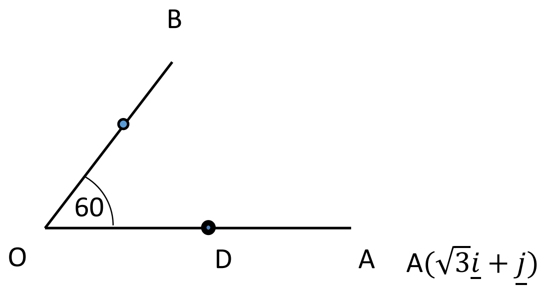
$= 2l - \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{l}{\sqrt{2}}$

$= 2l - \sqrt{2}l$ $\therefore amplitude = \sqrt{2}l$

05 05

25

14. 14.I



$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left(\sqrt{3}\underline{i}+\underline{j}\right).(\alpha\underline{i}+\beta\underline{j})$ (05)

(05) $\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos 60°=\sqrt{3}\alpha+\beta$ (05)

$\sqrt{3+1^2}\times 10\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\beta$

$10=\sqrt{3}\alpha+\beta$ (05)

$\overrightarrow{OB}=5\sqrt{3}\underline{i}-5\underline{j}$

$\alpha^2+\beta^2=10^2$ (05)

$\alpha^2+\left(10-\sqrt{3}\alpha\right)^2=100$

$\alpha^2+100+3\alpha^2-20\sqrt{3}\alpha=100$

$4\alpha^2-20\sqrt{3}\alpha=0$

$\alpha\left(\alpha-5\sqrt{3}\right)=0$

$\because\alpha\neq 0$

$\alpha=5\sqrt{3}$ (05)

$\beta=-5$ (05)

35

$OC:CB=1:\lambda$

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\lambda+1}\quad\overrightarrow{OB}=\frac{1}{\lambda+1}(5\sqrt{3}\underline{i}-5\underline{j})$

(05)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$ (05)

$\frac{\sqrt{3}\underline{i}}{2}-\frac{5\underline{j}}{2}=-\sqrt{3}\underline{i}-\underline{j}+\frac{1}{(\lambda+1)}\left(5\sqrt{3}\underline{i}-5\underline{j}\right)$ (10)

$\frac{\sqrt{3}\underline{i}}{2}-\frac{5\underline{j}}{2}=-\sqrt{3}\underline{i}+\frac{5\sqrt{3}}{\lambda+1}\underline{i}-\underline{j}-\frac{5}{\lambda+1}\underline{j}$

Comparing Coefficients of : $\underline{i},\underline{j}$

$\underline{i} \rightarrow \quad -\sqrt{3} + \dfrac{5\sqrt{3}}{\lambda + 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$-2 + \dfrac{10}{\lambda + 1} = 1$

$\dfrac{10}{\lambda + 1} = 3$

$10 = 3\lambda + 3$

$\lambda = \frac{7}{3}$ 05

$\underline{j} \rightarrow \quad -\dfrac{5}{2} = -1 - \dfrac{5}{\lambda + 1}$

$-5 = -2 - \dfrac{10}{\lambda + 1}$

$\dfrac{10}{\lambda + 1} = 3$

$10 = 3\lambda + 3$

$\lambda = \dfrac{7}{3}$ 05

$OC : CB = 1 : \dfrac{7}{3}$

$OC : CB = 3 : 7$

05

35

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}$

$= -5\sqrt{3}\underline{i} + 5\underline{j} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$= -5\sqrt{3}\underline{i} + 5\underline{j} + \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\underline{i} + \underline{j})$

$= \dfrac{1}{2}(-10\sqrt{3}\underline{i} + 10\underline{j} + \sqrt{3}\underline{i} + \underline{j})$

$\overrightarrow{BD} = \dfrac{-9\sqrt{3}\underline{i}}{2} + \dfrac{11\underline{j}}{2}$ 5

$\overrightarrow{AE} = \frac{10}{17}\overrightarrow{AC} = \frac{10}{17}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$ 5

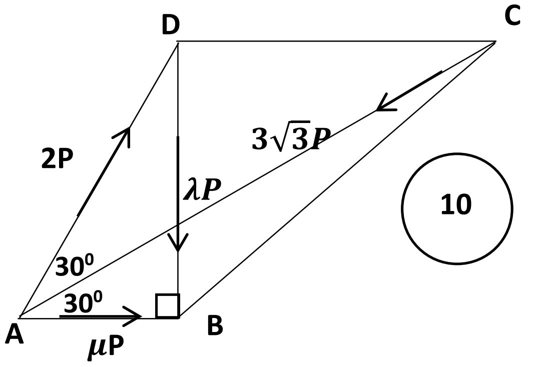
$\overrightarrow{AE} = \frac{10}{17}\left(-\sqrt{3}\underline{i} - \underline{j} + \frac{3}{10}\left(5\sqrt{3}\underline{i} - 5\underline{j}\right)\right)$

$= \frac{10}{17}\left(-\sqrt{3}\underline{i} - \underline{j} + \frac{3}{10}\left(5\sqrt{3}\underline{i} - 5\underline{j}\right)\right)$

$= \frac{10}{17}\left(-\sqrt{3}\underline{i} - \underline{j} + \frac{3}{10}\left(5\sqrt{3}\underline{i} - 5\underline{j}\right)\right)$ 5

$= \frac{10}{17}\left(-\sqrt{3}\underline{i} - \underline{j} + \left(\frac{3\sqrt{3}\underline{i}}{2} - \frac{3\underline{j}}{2}\right)\right)$

14.b



10

$B^{\curvearrowleft} = -3\sqrt{3}P \times AB\ Sin\ 30 + 2P \times AB\ Sin\ 60$ 10

$B^{\curvearrowleft} = -3\sqrt{3}P \times \frac{1}{2} \times AB + 2P \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB = -\frac{\sqrt{3}\ P}{2} \times AB$

$B^{\curvearrowleft} = \frac{\sqrt{3}\ P}{2} \times AB \neq 0$ 5

∴ the sys from in not equilibrium Value of λ, μ

$A \curvearrowright = 0$

$\lambda P \times A\beta = 0$

$P \neq O \quad AB \neq 0 \quad \lambda = O$

10

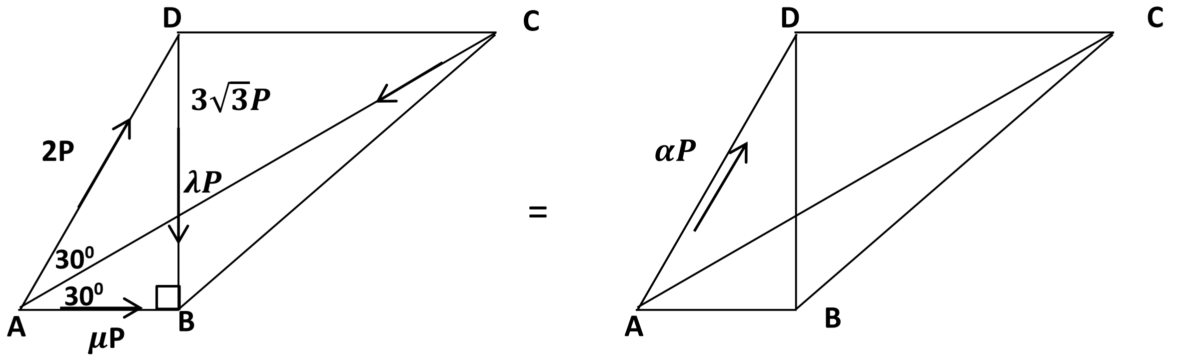
$D \curvearrowright = O$

- μP ×DB Sin 60 +$3\sqrt{3}$ P ×AD Sin 30^0 = 0

10

$\mu \times$ DB $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ =$3\sqrt{3}$ ×AD $\times \frac{1}{2}$; AD ≠ 0

μ = 3

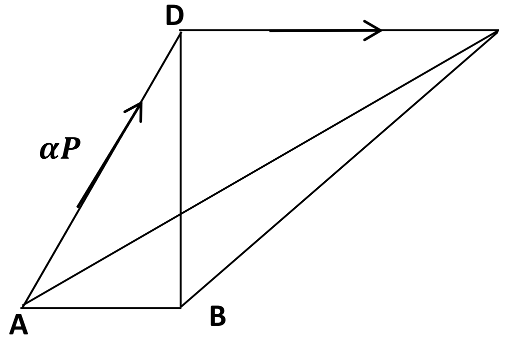


$C \curvearrowleft = 3P \times AC \sin 30 - 2P \times AC \sin 30 = \alpha P \times AC \sin 30$

10

$\frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\alpha = 1$ *if the line of action of new resultant ……………………..*

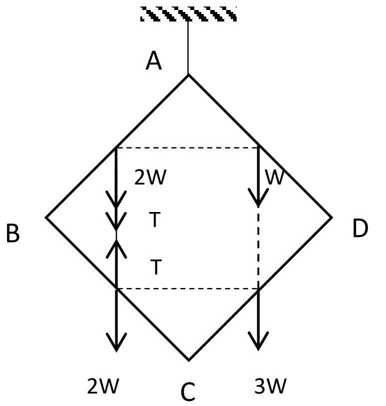


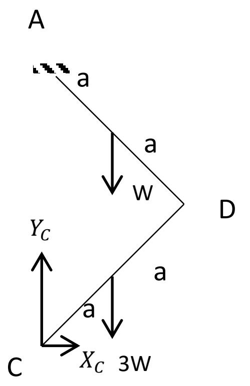
10

$G \circlearrowleft \qquad D = 0$

$G = 0$

15 a)





$A \circlearrowleft$

$4W\ .acos\dfrac{\pi}{4} = X_C.\,4acos\dfrac{\pi}{4}$ **10**

$X_c = W$ **05**

DC **10**

$Y_C\ .2acos\dfrac{\pi}{4} = X_C.\,2acos\dfrac{\pi}{4} + 3W.\,acos\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore Y_c = \dfrac{5}{2}W$ **05**

$\therefore\ C$

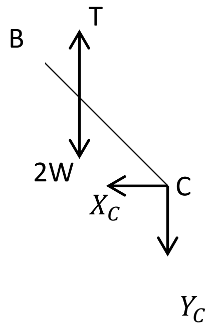
$R_C = \sqrt{{X_C}^2 + {Y_C}^2}$

$= \sqrt{W^2 + \frac{25}{4}W^2}$

$= \sqrt{W^2 + \frac{25}{4}W^2}$

$= \dfrac{\sqrt{29}}{2}W$ **05**

BC



(10)

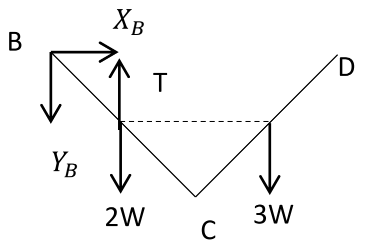
$B \circlearrowleft$

$$T.aCos\frac{\pi}{4} = 2W.aCos\frac{\pi}{4} + X_C.2acos\frac{\pi}{4} + Y_C.2acos\frac{\pi}{4}$$

$\therefore T = 2W + 2W + 5W$

$T = 9W$ (05)

BC+CD



$D \circlearrowleft$

$$Y_B.4aCos\frac{\pi}{4} + 2W.3aCos\frac{\pi}{4} + 3Wacos\frac{\pi}{4} = T.3acos\frac{\pi}{4}$$ (10)

$4Y_B + 6W + 3W = 3T = 3(9W)$

$\therefore Y_B = \frac{9}{2}W$ (05)

BC

$X_B = X_C = W$ (05)

$\therefore B$

$$R_B = \sqrt{W^2 + \frac{81}{4}W^2}$$

$= \frac{\sqrt{85}}{2}W$ (05)

A $\quad R_2.2a + (3W + W)acos\frac{\pi}{3} = 2W.a + (W + W)\left(2a + acos\frac{\pi}{3}\right)$ --------------(10)

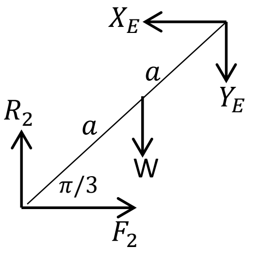
$R_2 = \frac{5}{2}W$ --------------(5)

↑

$R_1 + R_2 = 8W$

$\therefore R_1 = \frac{11}{2}W$ -------------(5)

Only the rod EF,



E $F_2.2a\cos\frac{\pi}{6} + W.a\cos\frac{\pi}{3} = R_2.2a\cos\frac{\pi}{3}$ --------------(10)

$F_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}W$ ----------------(5)

$R_2 = Y_E + W$

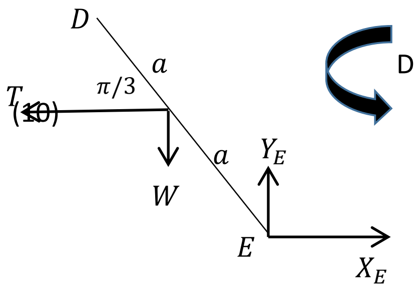
$Y_E = \frac{3}{2}W$ -------------------(5)

$X_E = F_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}W$-------------------(5)

Entire system

$F_1 = F_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}W$-------------------(5)

Only the rod DE



D $T.a\cos\frac{\pi}{6} + W.a\cos\frac{\pi}{3} = Y_E.2a\cos\frac{\pi}{3} + X_E.2a\cos\frac{\pi}{6}$ -----------(10)

$T = 2\sqrt{3}W$

For the equilibrium at A

$$F_1 \leq \mu R_1$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}W \leq \mu\frac{11}{2}W$$

$\frac{4}{11\sqrt{3}} \leq \mu$------------------(5)

For the equilibrium at F

$$F_2 \leq \mu R_2$$

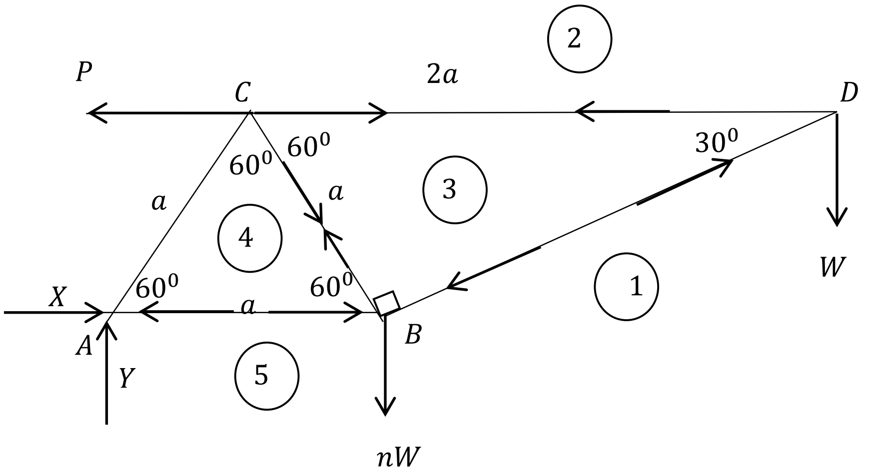
$$\frac{2}{\sqrt{3}}W \leq \mu\frac{5}{2}W$$

$\frac{4}{5\sqrt{3}} \leq \mu$------------------(5)

$\therefore If\ \frac{4}{11\sqrt{3}} < \mu < \frac{4}{5\sqrt{3}}$ then ------------------(5)

Even though the point A is in equilibrium, the point F is not in equilibrium.

b)



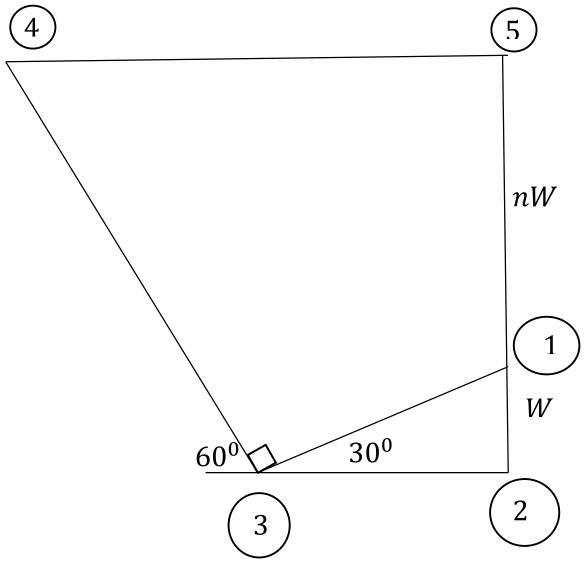
Lets take $AB = BC = AC = a$

$CD = 2a$

By considering the entire system,

A $P.a\cos\frac{\pi}{6} = nWa + w\left(2a + \frac{a}{2}\right)$ ------------------------(10)

$P = \left(\frac{2n+5}{\sqrt{3}}\right)W$



Rod	Tension	Thrust
AB	————————	$\left(\frac{n+4}{\sqrt{3}}\right)W$-------(5+5)
BC	$\frac{2}{\sqrt{3}}$(n+1)W-------(5+5)	————————
CD	$\sqrt{3}W$-------(5+5)	————————
BD	————————	$2W$

$(1)(3)cos\frac{\pi}{3} = (1)(2)$ $\quad$ $(2)(3) = (1)(3)cos\frac{\pi}{6}$ $\quad$ $(3)(4)cos\frac{\pi}{6} = nW + W$

$(1)(3) = 2W$ $\quad$ $= \sqrt{3}W$ $\quad$ $(3)(4) = \frac{2}{\sqrt{3}}(n+1)W$

$$(4)(5) = (2)(3) + (3)(4)cos\frac{\pi}{3}$$

$$(4)(5) = \sqrt{3}W + \frac{(n+1)}{\sqrt{3}}W$$

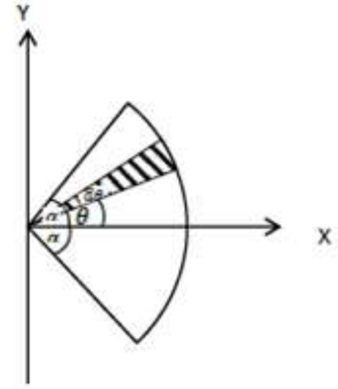
If the maximum possible tension for the rod BC is $10\sqrt{3}W$,

Then $\frac{2(n+1)}{\sqrt{3}}W \leq 10\sqrt{3}W$ -----------------(10)

$$n \leq 14$$

16.

(a) (1)



By the definition of center of mass.

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\propto}^{+\propto} \frac{2}{3}r\cos\theta \, \frac{1}{2}r^2 \, d\theta \rho}{\int_{-\propto}^{\propto} \frac{1}{2}r^2 \, d\theta \, \rho}$$ (5) (5)

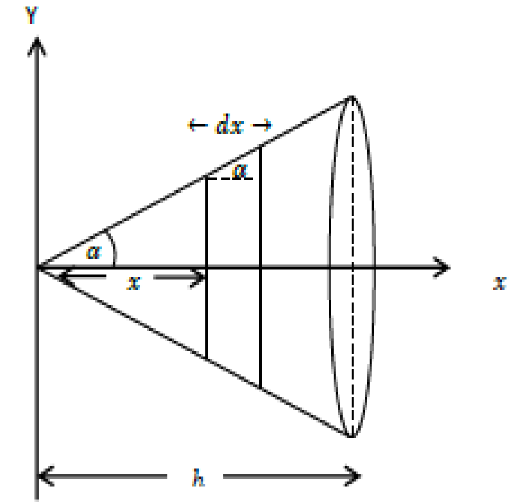
$$= \frac{\frac{1}{2}mr^2 \, \frac{2}{3}r \int_{-\propto}^{\propto} \cos\theta \, d\theta}{\frac{1}{2}mr^2 \int_{-\propto}^{\propto} d\theta} \qquad = \frac{2}{3}r\frac{[\sin\theta]_{-\propto}^{+\propto}}{[\theta]_{-\propto}^{+\propto}}$$ (5)

$$= \frac{2}{3}r\frac{[\sin\propto - \sin(-\propto)]}{[\propto-(-\propto)]} \qquad = \frac{2}{3}r\frac{2\sin\propto}{2\propto} \qquad = \frac{2r\sin\propto}{3\propto}$$ (5)

The center of mass of uniform secter lies on its symmetrical axis at a distance $\frac{2r\sin\propto}{3\propto}$ *from O.* (5)

25

(a) (II)



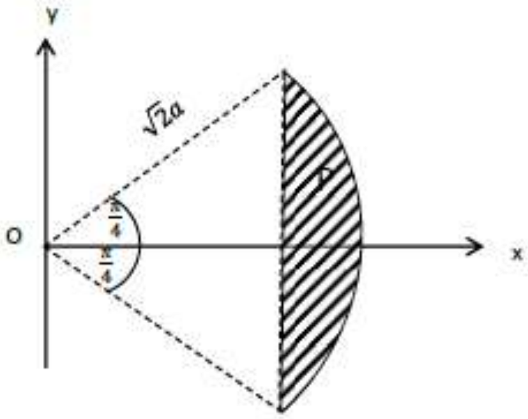
$$\bar{x} = \frac{\int_0^h 2\pi x \tan\alpha\, dx \sec\alpha\, \rho\, x}{\int_0^h 2\pi x \tan\alpha\, dx \sec\alpha\, \rho} \quad (5) \quad (5) \quad = \frac{2\pi \tan\alpha \sec\alpha\, \rho \int_0^h x^2}{2\pi \tan \sec \rho \int_0^h x}$$

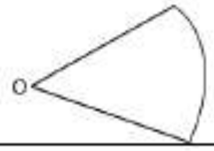
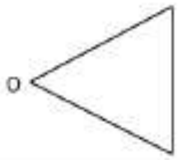
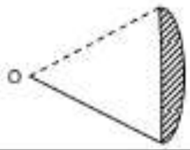
$$= \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h} \quad (5)$$

$$= \frac{2}{3}h \quad (5)$$

The center of mass of uniform hollow cone lies on its symmetrical axis at a distance $\frac{2h}{3}$ *form O.* (5)

25



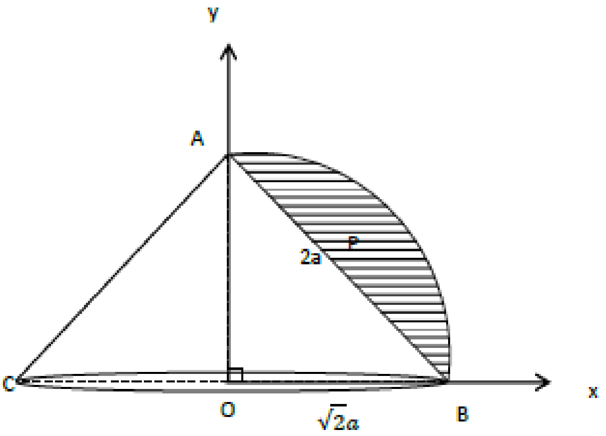
Object	Mass	$\bar{x}$
	$\frac{\pi a^2}{2}\rho$ (5)	$\frac{8a}{3\pi}$ (5)
	$a^2\rho$ (5)	$\frac{2}{3}a$ (5)
	$a^2(\pi/_2 - 1)\rho$ (5)	$\bar{x}$

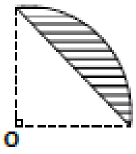
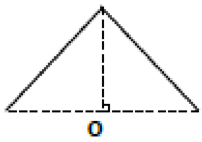
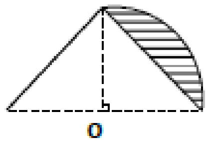
$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi a^2}{2}\rho\frac{8a}{3\pi} - a^2\rho\frac{2}{3}a}{a^2(\pi/_2 - 1)} = \frac{\frac{4a}{3} - \frac{2a}{3}}{\pi/_2 - 1} = \frac{4a}{3(\pi - 2)}$$ (5)

(5)

Centre of gravity of the object is on the ox symmetric axis as it is symmetric about ox

[40]



Object	Mass	$\bar{x}$	$\bar{y}$
	M	$\frac{2\sqrt{2}a}{3(\pi-2)}$ (5)	$\frac{2\sqrt{2}a}{3(\pi-2)}$ (5)
	5M	$\frac{\sqrt{2}a}{3}$ (5)	0 (5)
	6M	$\bar{x}$	$\bar{y}$

$6M\bar{x} = \frac{M\times 2\sqrt{2}a}{3(\pi-2)} + 5M \times \frac{\sqrt{2}}{3}a$

$\bar{x} = \frac{2\sqrt{2}a+5\sqrt{2}a(\pi-2)}{18(\pi-2)}$ (10)

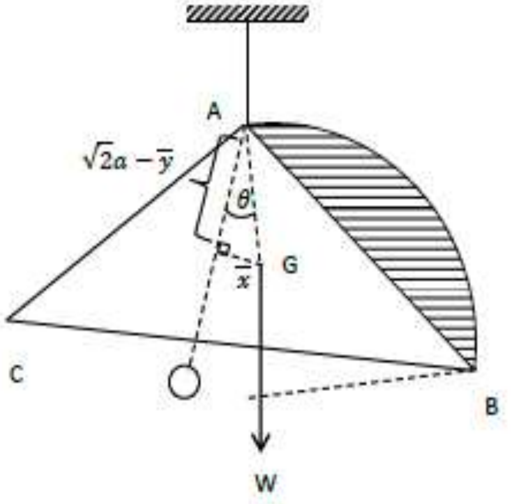
$= \frac{2+5(\pi-2)\,2\sqrt{2}a}{18\,(\pi-2)}$

$= \frac{(5\pi-2)\sqrt{2}a}{18\,(\pi-2)}$

$6M\bar{y} = \frac{M2\sqrt{2}a}{3(\pi-2)}$

$= \frac{\sqrt{2}a}{9(\pi-2)}$ (10)

40



(5)

$$\tan\theta = \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}a - \bar{y}} \qquad (5)$$

$$= \frac{\frac{a(5\pi-8)\sqrt{2}a}{18(\pi-2)}}{\sqrt{2}a - \frac{\sqrt{2}a}{9(\pi-2)}} \qquad (5)$$

$$= \frac{(5\pi-8)\sqrt{2}a}{2[9\sqrt{2}a(\pi-2) - \sqrt{2}a]}$$

$$= \frac{5\pi-8}{2[9(\pi-2)-1]} \qquad (5)$$

$$= \frac{5\pi-8}{2[9\pi-19]}$$

20

Part B (CM2)

17.

(a) $P(B) = 3, \quad P(B \cup C) = 0.37 \; and \quad P(C) = 0.2$

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ (05)

$(\therefore A \; and \; B \; are \; independent)$

$0.37 = P(A) + o.3 - P(A).0.3$ (05)

$0.07 = P(A) \times 0.7 \Rightarrow P(A) = 0.1$

(ii) $P(B'\backslash A^1) = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')}$ (05)

$P(B' \cap A') = P(B \cup A)' = 1 - P(B \cup A)$

$= 1 - 0.37 = 0.63$ (05)

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$

$\therefore \; P(B'\backslash A') = \frac{0.63}{0.9} = 0.7$ (05)

(iii) $P(A' \cap B' \cap C) = P(A')P(B')P(C)$ (05)

$= 0.9 \times 0.7 \times 0.2$

$= 0.126$ (05)

(iv) $Let \; X = \; (A \cap B' \cap C') \cup P(A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$ (05)

$\therefore P(X) = P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$

$= P(A) \; P(B') \; P(C') + P(A') \; P(B) \cup (C') + P(A')P(B')P(C)$ (05)

$= 0.1 \times 0.7 \times 0.8 + 0.9 \times 0.3 \times 0.8 + 0.9 \times 0.7 \times 0.2$

$= 0.398$ (05)

$\Rightarrow P(A/X) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)}$

$= \frac{P(A \cap B' \cap C')}{P(X)}$ (05)

$= \frac{0.1 \times 0.7 \times 0.8}{0.398}$

$= \frac{28}{199}$ (05)

60

(b)

Distance	x_i	$y_i = \dfrac{x_i - 45}{10}$	f	fy	fy^2
0 – 10	05	-4	10	-40	160
10 – 20	15	-3	19	-57	171
20 – 30	25	-2	43	-86	172
30 – 40	35	-1	25	-25	25
40 – 50	45	0	8	0	0
50 – 60	55	1	6	6	6
60 – 70	65	2	5	10	20
70 – 80	75	3	3	9	27
80 – 90	85	4	1	4	16
			120	-179	597
	(05)	(05)		(05)	(05)

$\therefore\ y_i = \frac{x_i - 45}{10}$ (05)

$\therefore\ \bar{x} = 10\bar{y} + 45$

$Henc\ \bar{y} = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{-179}{120} = -1.49$ (05)

$\therefore\ \bar{x} = 10(-1.49) + 45 = 30.08$ (05)

$\sigma y^2 = \frac{\sum f y_c^2}{\sum f} - \bar{y}^2$ (05)

$= \frac{1}{120}\ (597 - 120 \times 2.22)$ (05)

$= \frac{1}{120}\ (597 - 266.40) = 2.76$ (05)

(05)

$\sigma x^2 = 10^2 \sigma y^2 = 100 \times 2.76 = 276$ (05)

$\therefore\ \sigma x = 16.61$ (05)

65

11. $Number\ transfixed\ =\ 15$

$\therefore\ The\ new\ distribution\ has\ only\ 1^{st}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..\ total\ number$

$120 - 15 = 105$

$1^{st}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ [10{,}20]$

$\because\ Q_1 = \frac{1}{4} \times 105^{th}\ position =\ 26.25^{th}\ position$

$=\ 10\ +\ \frac{(26.25-10)}{19} \times 10$ (05)

$=\ 10\ + 8.55 = 18.55$ (05)

$3^{rd} Quater\ Q_3 = \frac{3}{4}(105)^{th}\ position$

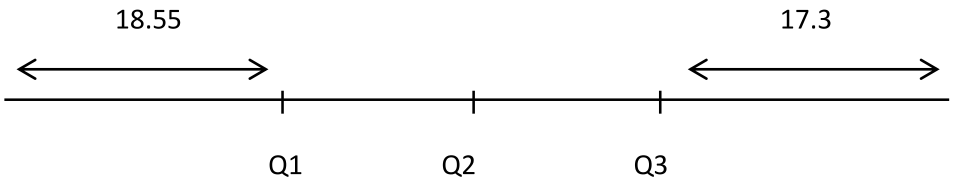
$= 78.75^{th}\ position$

$The\ requared\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ is\ [30{,}40]$

$Q_3 = 30 + \frac{(76.75-72)}{25} \times 10$ (05)

$= 30 + 2.7 = 32.7$ (05)

$\therefore\ IQR = 32.7 - 18.55 = 14.15$ (05)



$\therefore\ The\ distribution\ is\ approximately\ Symmetric.$ (05)

30

All Right Reserved

Confidential

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

G.C.E.(A.L) Support Seminar - 2023

10 – Combined Mathematics - I

Marking Scheme

1. Using the **principal of Mathematical induction** prove that $\sum_{r=1}^{n} 2^r = 2(2^n - 1)$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$

$When\, n = 1 \quad L.H.S.\ 2^r = 2 \quad R.H.S.\, 2(2^1 - 1) = 2$

$L.H.S. = R.H.S.$

$\therefore It\ is\ true\ for\ n = 1$ (05)

$Assume\ that\ it\ is\ true\ for\ n = k, k \in \mathbb{Z}^+$

$\sum_{r=1}^{k} 2^r = 2(2^k - 1)$ (05)

$when\ n = k + 1 \quad \sum_{r=1}^{k+1} 2^r = \sum_{r=1}^{k} 2^r + 2^{k+1}$ (05)

$= 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$

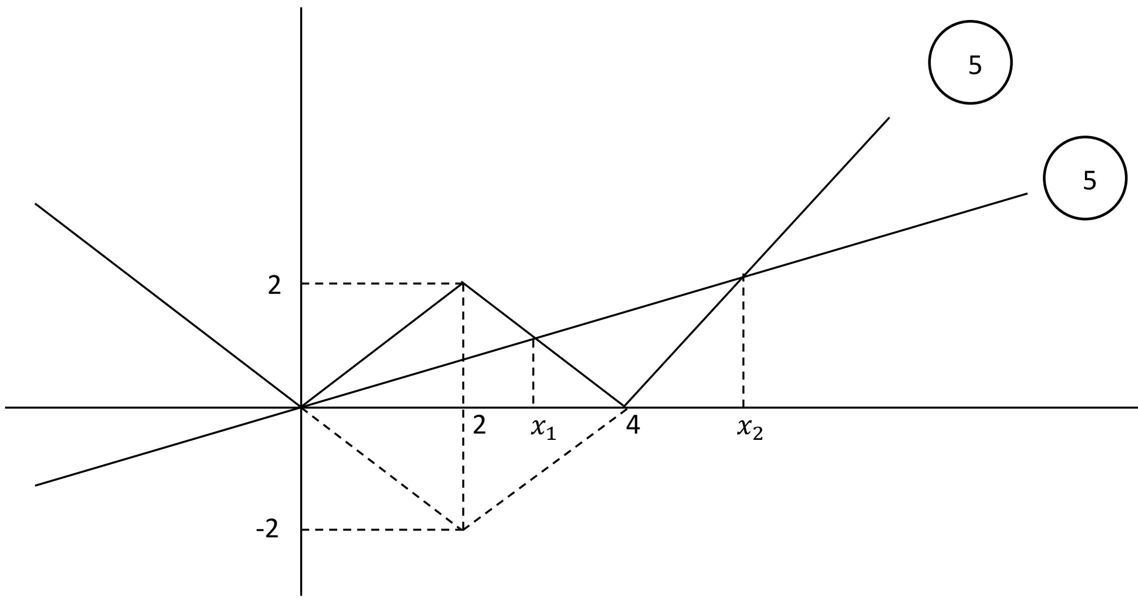
$= 2(2^{k+1} - 1)$ (05)

$\therefore the\ result\ is\ true\ for\ n = k + 1$

$By\ principal\ of\ mathematical\ induction\ The\ result\ is\ true\ for\ all\ n \in \mathbb{Z}^+$ (05)

25

2 Sketch the graph of $= \left||x-2|-2\right|$. Hence or otherwise solve the equation $\left||x-2|-2\right| = \frac{x}{2}$



$$-x_1 + 4 = \frac{x_1}{2}$$

$$-2x_1 + 8 = x_1$$

$$x_1 = \frac{8}{3}$$ (5)

$$-x_2 + 4 = \frac{x_1}{2}$$

$$2x_2 - 8 = x_2$$

$$x_2 = 8$$ (5)

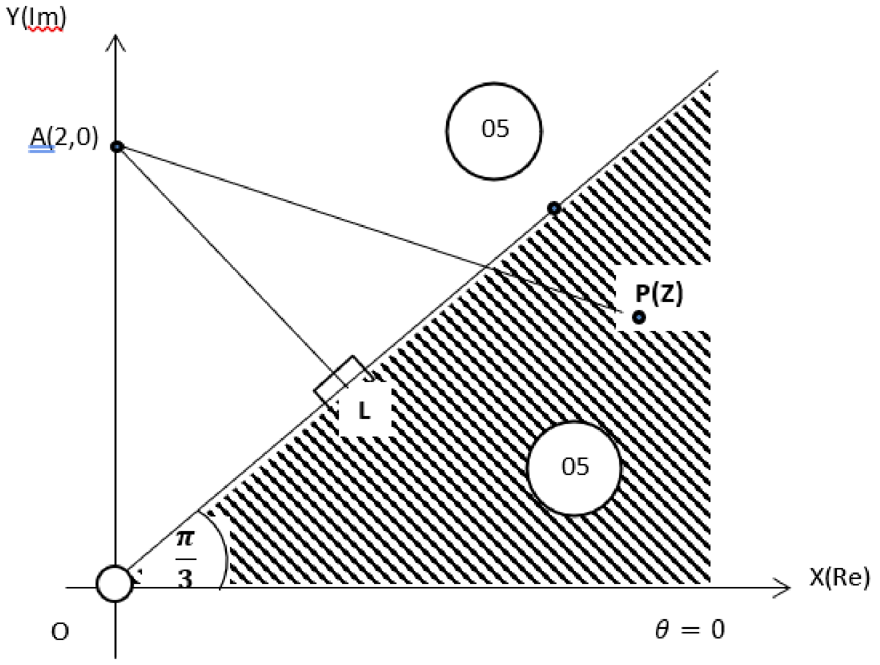
$$x = 0 \ OR \ x = \frac{8}{3} \ OR \ x = 8$$ (5)

25

3 Shade the region R that represents the complex number Z satisfying the condition $0 \leq ArgZ \leq \frac{\pi}{3}$ in an Argand Diagram.

Also find the least Value of $|iZ+2|$ in the region R.

$0 \leq ArgZ \leq \frac{\pi}{3}$



$|iZ+2| = |i(Z-2i)| = |Z-2i|$ (05)

$= AP$

$\therefore |iZ+2|_{least} = |Z-2i|_{least} = AP_{least}$

$= AL = 2sin\frac{\pi}{6}$ (05)

$= 1\ unit$ (05)

25

4 **Write down** the binomial expansion of $(1+x)^n$ in ascending powers of x. Given that the coefficient of x^2 in the expansion $(1+x+ax^2)^7$ is 14. Show that $a=-1$.

$n, r \in \mathbb{Z}^+ \; n \geq r \quad {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 05

$(1+x)^n = = {}^nC_0\, x^0 + {}^nC_1\, x^1 + {}^nC_2\, x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots\ldots + {}^nC_n\, x^n$ 05

$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} nCr\, x^r$

$(1+x+ax^2)^7 \qquad = [1+(x+ax^2)]^7$

$= {}^7C_0 + {}^7C_1\,(x+ax^2) + {}^7C_2\,(x+ax^2)^2 + \ldots\ldots$ 05

$= \ldots\ldots + (7a+21)\,x^2 + \ldots\ldots$

Coefficient of $x^2 = 14$ 05

$\Rightarrow 7a + 21 = 14$ 05

$a = -1$

25

---

5 Show that $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{sin(x-\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

$\frac{(2\sqrt{x}-\sqrt{\pi})}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{(2\sqrt{x}+\sqrt{\pi})}{(2\sqrt{x}+\sqrt{\pi})}$ 05

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4x-\pi}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2\sqrt{x}+\sqrt{\pi})}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4x-\pi}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2\sqrt{x}+\sqrt{\pi})}$ 05

$4 \times \frac{1}{\lim_{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to 0} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2\sqrt{x}+\sqrt{\pi})}$ 05

$4 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ 05 05

25

6 If $f(x) = (x+1)tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x}$, then find $\frac{d[f(x)]}{dx}$. Hence, deduce $\int tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$. The region enclosed by the curves $y = \sqrt{tan^{-1}\sqrt{x}}$, $x = 3$ and $y = 0$ is rotated about the $x-$ axis through 2π radians. Show that the volume of the solid thus generated is $\frac{\pi}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$ cubic units.

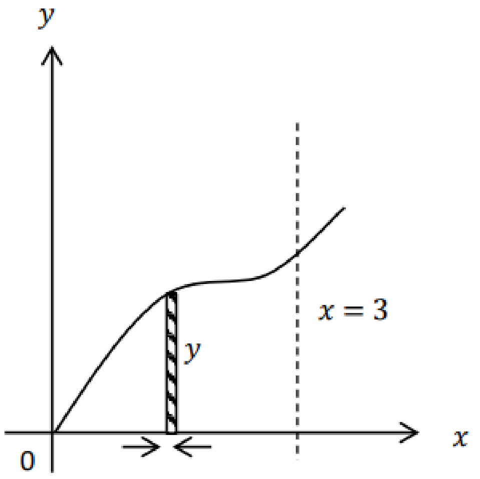
$\frac{d}{dx}[(x+1)tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x}] = (x+1)\frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}} + tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (05)

$= tan^{-1}\sqrt{x}$//

$\Rightarrow \int tan^{-1}\sqrt{x}\, dx = (x+1)tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c$ (05)

$x = 0, y = \sqrt{tan^{-1}\sqrt{0}}$

$= 0$



$V = \int_0^3 \pi y^2 dx = \pi \int_0^3 tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$ (05)

$= \pi[(x+1)tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x}]_0^3$

$= \pi\,[4\,tan^{-1}\sqrt{3} - \sqrt{3} - 0]^0$ (05)

$= \pi\,(4\,{}^{\pi}/_{3} - \sqrt{3})$

$= \pi\,(4\pi - 3\sqrt{3})$ Cubic units (05)

25

7 A curve C is given by the parametric equations $x = a\cos\theta$ and $y = b\sin\theta$ for $(0 \leq \theta \leq \pi)$. Show that the equation of the normal to the curve C, at point P, is $ax\sec\alpha - by\mathrm{cosec}\,\alpha + b^2 - a^2 = 0$.

Also find the normal to the curve C, at point $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ on the curve C.

$x = a\ \cos\theta,\ y = b\ \sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\ \sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b\cos\theta}{a\ \sin\theta} = \frac{-b}{a}cot\theta$$ (05)

Gradient of the normal $\frac{a}{b}tan\theta = \frac{a}{b}tan\alpha$ (05)

∴ Equation, $y - bsin\alpha = \frac{atan\alpha}{b}(x - acos\alpha) = \frac{asin\alpha}{bcos\alpha}(x - acos\alpha)$

$bycos\alpha - b^2sin\alpha cos\alpha = axsin\alpha - a^2sin\alpha cos\alpha$

$axsin\alpha - bycos\alpha - (a^2 - b^2)sin\alpha cos\alpha = 0$

$axsec\alpha - bycosec\alpha + b^2 - a^2 = 0$ (05)

$\frac{-a}{\sqrt{2}} = acos\theta$ $\qquad$ $\frac{b}{\sqrt{2}} = bsin\theta$

$cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} =$ $\qquad$ $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

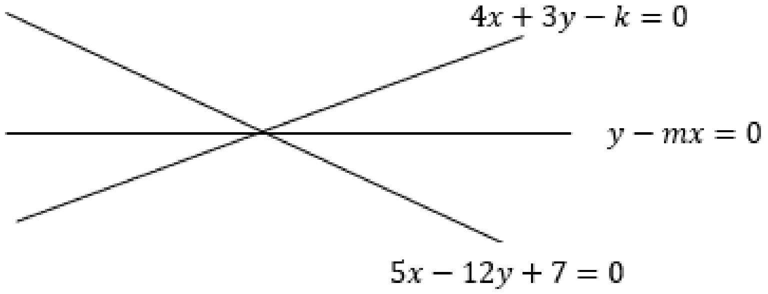
$\theta = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad$ $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (05)

$-\sqrt{2}ax - \sqrt{2}by + b^2 - a^2 = 0$

$\sqrt{2}ax + \sqrt{2}by + a^2 - b^2 = 0$ (05)

25

8 The straight line $l \equiv y - mx = 0$ passes through the point of intersection of two straight lines $4x + 3y - k = 0$, where k is constant and $5x - 12y + 7 = 0$. Find the value of m in terms of k. Further, given that the line, $l = 0$ is perpendicular to the line $x + y = 0$. Find the values of m and k.



$4x + 3y - k + \lambda(5x - 12y + 7) = 0$ (05)

$(4 + 5\lambda)x + (3 - 12\lambda)y - k + 7y = 0 \ c \Rightarrow y - mx = 0$

$m = \frac{4+5\lambda}{12\lambda-3}$ (05) $-k + 7\lambda = 0$ (05)

$\lambda = +\frac{k}{7}$

(05)

$$m = \frac{4 + 5\left(\frac{k}{7}\right)}{12\left(\frac{k}{7}\right) - 3} = \frac{28 + 5k}{12k - 21}$$

$(\because x + y = 0 \perp)$

$$m = 1 = \frac{28 + 5k}{12k - 21} \Leftrightarrow 12k - 21 = 28 + 5k$$

$7k = 49$

$K = 7$ (05)

25

9 A circle S with centre on the y-axis intersects the circle $x^2 + y^2 = 9$ orthogonally and the circle $x^2 + y^2 + x - 7y + 5 = 0$ bisects the circumference of the circle S. Show that there are two such circle S, and find their equations.

$Lets\ S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$g = 0\ (\because Centre\ lies\ on\ y\ axis)$ (05)

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

$g = 0, f = 0, c_1 = -9$

$2g(0) + 2f(0) = c - 9 \Rightarrow c = 9$ (05)

$x^2 + y^2 + 2fy + 9 = 0$

$x^2 + y^2 + x - 7y + 5 = 0$

Common chord $x - 7y - 2fy - 4 = 0$ (05)

$0 + 7f + 2f^2 - 4 = 0$

$2f^2 + 7f - 4 = 0$

$(2f - 1)(f + 4) = 0$

$f = \frac{1}{2}\ or\ f = -4$ (05)

$\therefore equation\ is \quad x^2 + y^2 + y + 9 = 0$

$x^2 + y^2 - 8y + 9 = 0$ (05)

$\because x + y = 0\ line\ in\ perpendicular\ to\ the\ line\ l = 0$

25

10 Given that $tanA = \frac{5}{12}$ and $sinB = \frac{4}{5}$; Where A and B are such that $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$ and $\frac{\pi}{2} < B < \pi$.

Find the value of $sin(A + B)$

$tan^2A + 1 = sec^2A$

$cosA = \pm\frac{1}{\sqrt{tan^2A-1}}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{25}{144}}}}$

$= \pm\frac{12}{13}$

$\because \pi < A < \frac{3\pi}{2}$

$cosA = -\frac{12}{13}$ (05)

$cosB = \pm\sqrt{1 - sin^2A}$

$\pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}}$

$\pm\frac{3}{5}$

$\because \frac{\pi}{2} < A < \pi$

$cosB = -\frac{3}{5}$ (05)

$sinA = \pm\sqrt{1 - cos^2A}$

$= \pm\sqrt{1 - \frac{144}{169}}$

$= \pm\frac{5}{13}$

$\because \pi < A < \frac{3\pi}{2}$; $sinA = -\frac{5}{13}$ (05)

$sin(A + B) = sinAcosB + cosAsinB$

$= \left(-\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$ (05)

$= \frac{15}{65} - \frac{48}{65}$

$= -\frac{39}{65}$ (05)

25

Part B

11 (a) Write down the sum and the product of the roots of quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, in terms of a, b and c where $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Given that $f(x) \equiv x^2 - p^2qx + q^2$ where $p, q \in \mathbb{R}^+$ and roots of the equation $f(x) = 0$ are α and β.

(i) Find $\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}}$ in terms of p and q.

(ii) If α and β are real, then find the least integer value of p.

(iii) For the above p value find the quadratic equation in terms of q, whose roots are $\alpha^{\frac{3}{2}}$ and $\beta^{\frac{3}{2}}$.

(b) Let $P(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x + \lambda$; where $\lambda \in \mathbb{R}^+$

(i) If λ is zero of the polynomial $P(x)$, find λ

(ii) If $-\lambda$ is zero of the polynomial $P(x)$, find λ

(iii) For the value of λ which satisfies both (i) and (ii), write down the polynomial $P(x)$ and express $P(x)$ as a multiple of linear factors.

(iv) Find the remainder, when $P(x) + 3x + 2$ is divided by $x^2 + 1$.

$ax^2 + bx + c = 0$ roots are $\propto, \beta$

$\propto + \beta = -\frac{b}{a}$ (05) $\propto \beta = \frac{c}{a}$ (05)

$f(x) = 0, x^2 - p^2qx + q^2 = 0$ $\propto, \beta$

$\propto + \beta = p^2q$ (05) $\propto \beta = q^2$ (05)

$\left(\propto^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$ (05)

$= (\propto + \beta)(\propto 2 + \beta 2 \quad \propto \beta) + 2\sqrt{\propto^3 \beta^3}$ (05)

$= (\propto + \beta)[(\propto + \beta)^2 - 3 \propto \beta] + 2\sqrt{(\propto \beta)^3}$ (05)

$= p^2q(p^4q^2 - 3q^2) + 2q^3$

$= q^3[p^2(p^4 - 3) + 2]$ (05)

$\propto^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} = \sqrt{q^3[p^2(p^4 - 3) + 2]}$

40

$Real\ roots\ for\ \propto, \beta\ \ \Delta x\ \geq\ 0$ (05)

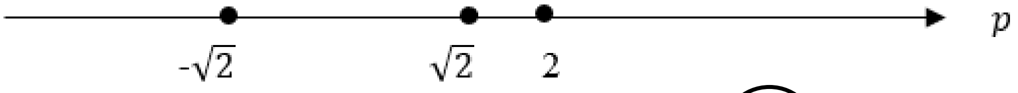
$p^4\, q^2\ - 4q^2\ \geq\ 0$ (05)

$q^2 > 0\quad p^4 - 4\ \geq\ 0$

$(p2\ - 2)\,(p2\ +\ 2) \geq\ 0$ (05)

$\left(p\ - \sqrt{2}\right)\ \left(p + \sqrt{2}\right)\ \geq\ 0$

$(p\ - \sqrt{2})\ \ (p + \sqrt{2})\ \geq\ 0$ (05)



$least\ integer\ of\ p\ is\ 2$ (05)

$Sum\ of\ two\ roots$

$\propto^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}}\ = \sqrt{q^2\ (p^2(p^4\ 3\ ) + 2}$

$P = 2$

$= \sqrt{q^3(4\ (16 - 3) + 2}$

$= \sqrt{54\ q^3}$ (05)

$Product\ of\ two\ roots$

$= \sqrt{\propto^3\ \ \beta^3}\ = \sqrt{(q^2\ )^3}\qquad = q^3$ (05)

$Quadratic\ Equation >\qquad x^2 - \sqrt{54\ q^3}\ \ x\ +\ q^3\ =\ 0$ (05)

40

(b)

(i)

$f(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x + \lambda$

λ *is Zero for a polynomial* $f(x), f(\lambda) = 0$ (05)

$2\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$ (05)

$\lambda(2\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$

$(2\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \ (\because \ \lambda \neq 0)$ (05)

$\lambda = \frac{1}{2}$ *or* $\lambda = -1$ (05)

20

(ii)

$(-\lambda)$ *is a zero of* $f(x), f(-\lambda) = 0$ (05)

$-2\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + \lambda = 0$

$-2\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda = 0$

$(\lambda \neq 0) \qquad -\lambda(2\lambda^2 - \lambda - 3) = 0$

$(2\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ (05)

$\lambda = \frac{3}{2}$ *or* $\lambda = -1$ (05)

15

(iii)

From (i) and (ii)

when $\lambda = -1$ (05)

$f(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$\equiv (x - 1)(x + 1)(2x + 1)$ (05)

10

(iv)

$g(x) \equiv f(x) + 3x + 2$

$\equiv (x-1)(x+1)(2x+1) + 3x + 2$

$\equiv (x^2+1)(2x+a) + px + q$

$x = 1 \qquad 5 = 2(2+a) + p + q$

$x = -1 \qquad -1 = 2(-2+a) - p + q$

$x = 0 \qquad -1 + 2 = a + q$

$1 = 2a + p + q$ ——— (1)

$3 = 2a - p + q$ ——— (2)

$1 = a + q$ ——— (3)

(2) - (1) $\qquad p = -1$

(1) + (2) $\qquad q = 0$

$\therefore$ *when* $g(x)$ *is divided by* $x^2 + 1$, *the reminder is* $-x$. (05)

25

12 (a) An institution has 8 cars and there are parking facilities in two rows, 4 cars in each row in the park.

(i) Find the number of ways in which 8 cars can be parked.

(ii) Find the number of ways in which 8 cars can be parked, if the first place in the first row is to be reserved for chairman's car and a place in the first row for the car of secretaries.

(iii) If the first place in the first row should be given to either one of the two cars of chairman's or secretaries, and if the other car should also have a place in the first row, find the number of ways in which the cars can be parked.

(b) Find the value of the constants A and B such that,

$$\frac{r^2+3r-1}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)} = \frac{Ar+B}{r^2-r+1} - \frac{Ar+2B}{r^2+r+1} \quad ; \text{ where } r\epsilon\mathbb{Z}^+.$$

If, $U_r = \dfrac{r^2+3r-1}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)}$ then determine f_r such that $U_r = f_r - f_{r+1}$

Hence, show that $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = 2 - \frac{(n+2)}{n^2+n+1}$

Is this series convergent? Justify your answer.

If, $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r < 2 - \frac{11}{91}$ then find greatest value of n.

(a)

I. $^8C_4 \times 4! \times {^4C_4} \times 4! = \frac{8\times7\times6\times5}{4!} \times 4! \times 4! = 8!$ (10)

$= 40320$ (05)

II. $^6C_2 \times 3! \times {^4C_4} \times 4! = \frac{6\times5}{2\times1} \times 3\times2\times1\times1\times24$ (15)

$=15\times6\times24$

$=2160$ (05)

III. $^2C_1 \times {^6C_2} \times 3! \times 4! \times {^4C_4}$ (20)

$=2 \times \frac{6\times5}{1\times2} \times 6 \times 24 \times 1$

$=2 \times 15 \times 6 \times 24$

$= 4320$ (05)

60

(b)

$$\frac{r^2+3r-1}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)} = \frac{Ar+B}{(r^2-r+1)} - \frac{Ar+2B}{(r^2+r+1)}$$

$$r^2 + 3r - 1 = (Ar + B)(r^2 + r + 1) - (Ar + 2B)(r^2 - r + 1)$$

$$= Ar^3 + Ar^2 + Ar + Br^2 + Br + B - (Ar^3 - Ar^2 + Ar + 2Br^2 - 2Br + 2B$$

$$r^2 + 3r - 1 = 2Ar^2 - Br^2 + 3Br - B$$

Comparing coefficients

$r^2 \to 2A - B = 1$ (05)

$r \to 3B = 3 \implies B = 1$ (05)

coefficients

$A = 1$ (05)

Constant satisfied $-B = -1$

$$u_r = \frac{r+1}{r^2-r+1} - \frac{r+2}{r^2+r+1}$$

$u_r = f_r - f_{r+1}$; $f_r = \frac{r+1}{r^2-r+1}$ (10)

$u_1 = f_1 - f_2$

$u_2 = f_2 - f_3$ (05)

$u_3 = f_3 - f_4$ +

$u_{n-1} = f_{n-1} - f_n$ (05)

$u_n = f_n - f_{n+1}$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f_1 - f_{n+1}$$ (05)

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = 2 - \frac{n+2}{n^2+n+1}$$ (05)

This series is convergent

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}u_r = \lim_{n\to\infty} 2-\frac{n+2}{n^2+n+1}$$ 05

$= 2-0 = 2\epsilon\mathbb{R}$ 05

$$\sum_{r=1}^{n}u_r < 2-\frac{11}{91}$$ 05

$$2-\frac{n+2}{n^2+n+1} < 2-\frac{11}{91}$$ 05

$$\frac{n+2}{n^2+n+1} > \frac{11}{91}\ ;\ \ n>1$$

$91(n+2) > 11(n^2+n+1)$

$91n+182 > 11n^2+11n+11$

$0 > 11n^2-80n-171$ 05

$0 > 11n^2-99n+19n-171$

$0 > 11n(n-9)+19(n-9)$

$$0 > \underbrace{(11n+19)}_{>0}(n-9)\ \ ;n\in\mathbb{Z}^+$$ 05 05

$0 > n-9$

$9 > n$ 05

Thus maximum value of $n = 8$ 05

90

13 **(a)** If $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, show that any real matrix B which commutates with A, under multiplication, can be written in the form $\lambda A + \mu I$, where λ *and* μ are real numbers and I is the identity matrix of order 2. Find the value of λ *and* μ *when* $B = A^2$ Hence Find A^{-1}.

(b) By Factorizing Z^6-1, completely solve the equation $Z^6 = 1$.

If Z_1 and Z_2 are any two distinct roots of the equation $Z^6 = 1$, show by reference to an Argent diagram, or otherwise, that the three possible values of $|Z_1 - Z_2|$ are 1, 2 and $\sqrt{3}$.

(c) By using De moivre's theorem for positive integer n,

Show that $\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Deduce that, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = (-1)^n$

(a) Let $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Then $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (05)

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a+b & a \\ 2c+d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a & b \end{bmatrix}$ (05)

$\Leftrightarrow 2a + b = 2a + c$

$a + 2b + d$

$2c + d = a$

$c = b$ (15)

$\Leftrightarrow a = 2b + d, c = b$ (05)

$\therefore B = \begin{bmatrix} 2b+d & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ (05)

$= b\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \lambda A + \mu I$ where $\lambda = b$ *and* $\mu = d$ (05)

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (05)

$B^2 = A^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\lambda+\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (05)

$\therefore \lambda = 2$ and $\mu = 1$ (05)

$\therefore A^2 = 2A + I$ $\quad c.e.\ A^2 - 2A = I$

$A(A - 2I) = I$ (05)

60

b) $Z^6 - 6 = 0$

05

$\Longrightarrow (Z^3 - 1)(Z^3 + 1) = 0$

$(Z - 1)(Z^2 + Z = 1)(Z + 1)(Z^2 - Z + 1) = 0$

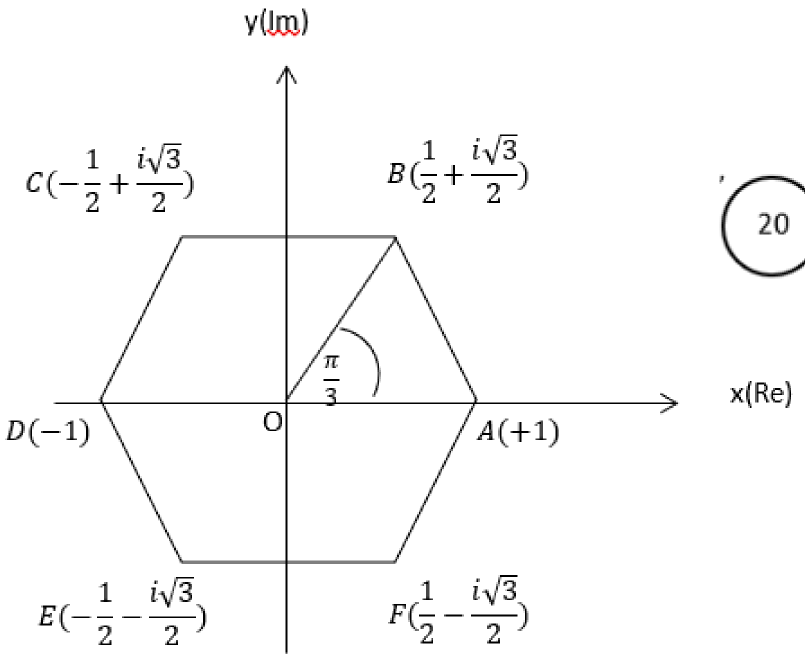
$Z = 1, \quad \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, \quad \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2};$

20

This gives the six results

$Z = \pm 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $i^2 = -1$

The modules and argument of each root are 1 and a multiple of $\frac{\pi}{3}$ respectively. On the Argand diagram there six roots can be represented by six points as shown in the figure.



20

$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1$ All the six points A, B, C, D, E, F lie on the circle with centre O and radius 1 unit.

05

For any two of the six results Z_1 and Z_2

$|Z_1 - Z_2|$ is the length of the segment which joints any two points out of those six points. 10

$\therefore |Z_1 - Z_2| = 1$ or 2 or $\sqrt{3}$ units

$\because AB = 1, AD = 2, AC = \sqrt{3}$

Alt: Consider the possible values of $|Z_1 - Z_2|$ algebraically.

60

(c) $\left(\frac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}\right)^n = \left(\frac{sin^2\theta-i^2cos^2\theta+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}\right)^n$ 05

$$= \left(\frac{(sin\theta+icos\theta)(sin\theta-icos\theta)+(sin\theta+icos\theta)}{1+sin\theta-icos\theta}\right)^n$$

$$= \left(\frac{(sin\theta + icos\theta)(sin\theta - icos\theta + 1)}{1 + sin\theta - icos\theta}\right)^n$$ 05

$$= (sin\theta + icos\theta)^n$$

$$= \left\{cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^n$$ 05

$$= cos\ n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + isin\ n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$ (De Movers')

When $\theta = 0$ and replaced n by $2n$ for the above 05

$\left(\frac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}\right)^{2n} = cos\ 2n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\ sin\ 2n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 05

$= cos\ n\pi + i\ sin\ n\pi$

Where $sin2n\pi = 0$ and $cosn\pi \begin{cases} = +1\ ;\ n\ even \\ = -1\ ;\ n\ odd \end{cases}$ 05

$\therefore \left[\frac{1+i}{1-i}\right]^{2n} = (-1)^n$

30

14 (a) Let $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}$ for $x \neq -1$

Show that $f'(x)$ the first derivative of $f(x)$ with relative to x, is given by

$f'(x) = -\frac{(x-3)}{(x+1)^3}$

.

Hence, find the intervals on which $f(x)$ is decreasing and the intervals on which $f(x)$ is increasing.

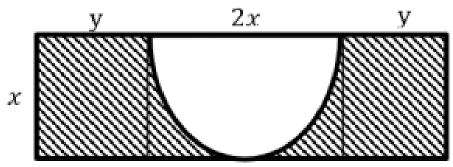
Obtain the coordinates of the turning point of $f(x)$.

It is given that $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$ for $x \neq -1$.

Find the coordinates of the point of inflection on the graph of $y = f(x)$.

Sketch the graph of $y = f(x)$ indicating the asymptotes, turning point and point of inflection.

(b) The shaded region shown in the figure is obtained by removing a semicircular lamina of radius $x\,m$ from a rectangle of length $2(x+y)\,m$ and width $x\,m$.



The area of the rectangle is $8\pi\, m^2$. Show that the perimeter p of the shaded region, measured in meters, is given by $P = \pi\left(x + \frac{16}{x}\right)$

(a)

$$f(x) = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}$$

$$f^1(x) = \frac{(x+1)^2(2x+3) - x(x+3)2(x+1)}{(x+1)^4}$$ (20)

$$= \frac{(x+1)(2x+3) - 2x(x+3)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2x^2 + 5x + 3 - 2x^2 - 6x}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-x+3}{(x+1)^3}$$

$$f^1(x) = \frac{-(x-3)}{(x+1)^3}$$ (05)

25

Turning point $\rightarrow f^{1}(x) = 0$ $\quad x = 3$ (05)

$y = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ $\quad \left[3, \frac{9}{8}\right]$ (05)

Vertical asymptote $\rightarrow x = -1$ (05)

Horizontal asymptote $\rightarrow$ $---= \frac{x(x+3)}{(x+1)^2} = 1 \rightarrow y = 1$ (05)

	$-\alpha < x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < +\alpha$
$f^{1}(x)$ sign	< 0	> 0	< 0
Nature of the function	decrease	increase	decrease

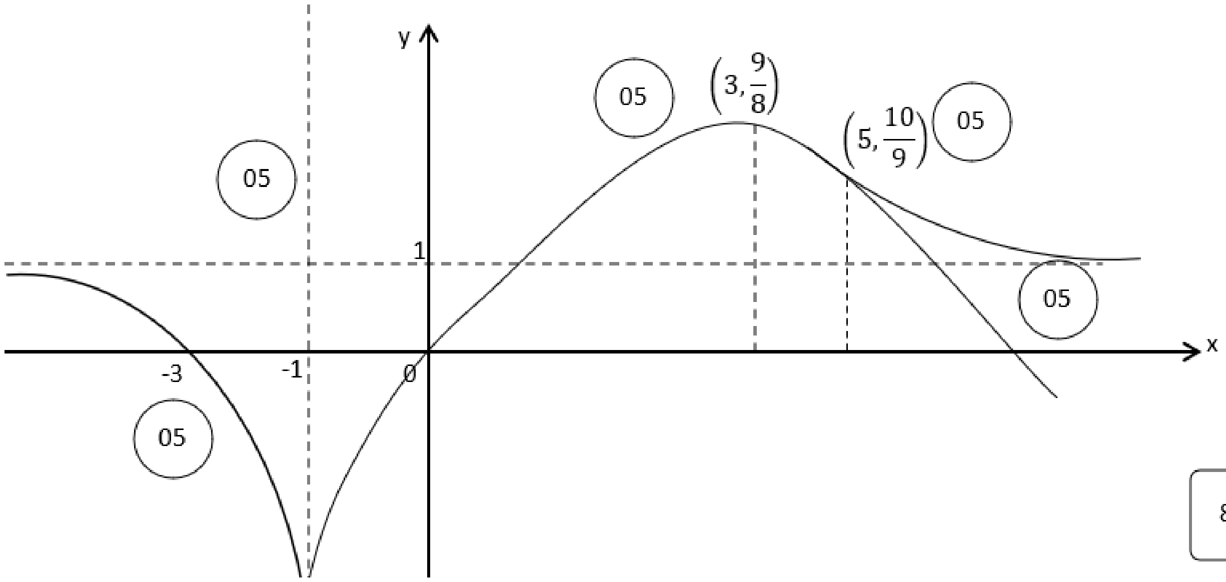
(15) (05)

Point of inflection$\rightarrow f^{11}(x) = 0 \rightarrow x = 5$ (05)

	$-\alpha < x < 5$	$5 < x < +\alpha$
$f^{11}(x)$ ලකුණ	< 0	> 0
Concavity	down ∩	up ∪

(05) (05)

$x = 5$ is the point of inflection



80

(b)

$(2x+2y)x = 8\pi$ (05)

$(x+y)x = 4\pi$

$x^2 + xy = 4\pi$

$y = \frac{4\pi - x^2}{x} = \frac{4\pi}{x} - x$ (05)

$P = 2x + 2x + 4y + \pi x = (4+\pi)x + 4\left[\frac{4\pi}{x} - x\right]$ (05)

$P = 4x + \pi x + \frac{16\pi}{x} - 4x = \pi\left[x + \frac{16}{x}\right]$ (05)

$\frac{dP}{dx} = \pi\left[1 - \frac{16}{x^2}\right]$ (05)

$\frac{dP}{dx} = 0 \rightarrow x = 4 \ (x > 0)$ (05)

	$x < 4$	$4 < x$
$\frac{dP}{dx}$	$-$	$+$
	(05)	(05)

$\therefore$ *when* $x = 4$, P is minimum (05)

45

15 (a) Determine the values of constants A, B and C such that

$x^4+1=A(x^4-1)+B(x^2+1)(x+1)+C(x^2+1)(x-1)-(x^2-1)$ for $x\in\mathbb{R}$,

hence, find $\int\frac{x^4+1}{x^4-1}dx$

(b) (i) If $y=x+\cos x\sin^3x$ show that $\frac{dy}{dx}=1+3\sin^2x-4\sin^4x$.

Given that $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+3x\sin^2x-4x\sin^4x)\,dx$. By using above result and using integration by parts, Show that $I=\frac{1}{8}(\pi^2-2)$

(ii) Further given that,

$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\cos^2x-4\cos^4x)\,dx$

$J_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+3x\cos^2x-4x\cos^4x)\,dx$

Using the result $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$

Show that $I=\frac{\pi}{2}J_1-J_2$

Now given that $\frac{d}{dx}(x-\sin x\cos^3x)=1+2\cos^2x-4\cos^4x$

show that $J_2=\frac{1}{8}(\pi^2+2)$, deduce the value of J_1.

(c) Using the substitution $\sqrt{x^3+1}=t$, Evaluate $\int_0^2\frac{x^8}{\sqrt{x^3+1}}dx$.

(a) $x^4+1=A(x^4-1)+B(x^2+1)(x+1)+C(x^2+1)(x-1)-(x^2-1)$

$=Ax^4+(B+C)x^3+(B-C-1)x^2+(B+C)x+(-A+B-C+1)$

$x^4\to A=1$

$x^3\to B+C=0$

$x^2\to B-C-1=0$ (20)

$x^1\to B+C=0$

$x^0\to -A+B-C+1=1$

$\therefore\ \int\frac{x^4+1}{x^4-1}dx=\int\frac{A(x^4-1)+B(x^2+1)(x+1)+C(x^2+1)(x-1)-(x^2-1)}{x^4-1}dx$

$=A\int dx+B\int\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}dfxc\int\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^4-1}dx-\int\frac{x^2-1}{x^4-1}dx$ (05)

$=Ax+B\int\frac{1}{x-1}dx+C\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx$ (05)

$=x+\frac{1}{2}ln|x-1|-\frac{1}{2}ln|x+1|-\tan^{-1}x+k$ (20)

$=x+ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\tan^{-1}x+k$ (05)

55

(b)

(i) $\frac{d(x+Cos\,x.Sin^3x)}{dx} = 1 + Cos\,x.3Sin^2x\ \ Cos\,x + Sin^3x(-Sinx)$ (05)

$= 1 + 3\,Sin^2x(1 - Sin^2x) - Sin^4x$

$= 1 + 3\,Sin^2x - 4Sin^4x$ (05)

$I = \int_0^{\pi/2} x\,(1 + 3\,Sin^2x - 4Sin^4x)dx$

$= \int_0^{\pi/2} x\,.\frac{d}{dx}(x + Cosx\,Sin^3x).\,dx$ (05)

$= [x(x + Cos\,x\,Sin^3x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(x + Cosx\,Sin^3x)\,dx$ (05)

$= \left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - 0\right] - \int_0^{\pi/2} x\,dx - \int_0^{\pi/2} Sin^3x.Cos\,x\,dx$ (05)

$= \frac{\pi^2}{4} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{Sin^4x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(\pi^2 - 2)$ (05) **30**

(ii)

$I = \int_0^{\pi/2}(x + 3x\ \ Sin^2x - 4x\,Sin^4x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)Sin^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]dx$ (05)

$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\pi}{2} - x + 3\ \ \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ Cos^2x - 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)Cos^4x\right]dx$ (05)

$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + 3\,Cos^2x - 4Cos^2x)dx - \int_0^{\pi/2}(x + 3x\,Cos^2x - 4xCos^4x)\,dx$

$= \frac{\pi^2}{4} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{Cos^4x}{4}\right]_0^{\pi/2}$ (05)

$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} - \left[0 - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(\pi^2 + 2)$ (05)

$\therefore I = \frac{\pi}{2}\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2$

$\frac{1}{8}(\pi^2 - 2) = \frac{\pi}{2}\,\mathcal{J}_1 - \frac{1}{8}(\pi^2 + 2)$ (05)

$\frac{1}{8}(\pi^2 - 2) + \frac{1}{8}\ (\pi^2 + 2) = \frac{\pi}{2}\mathcal{J}_1$

$\mathcal{J}_1 = \frac{\pi}{2}$ (05)

30

(c)

$\sqrt{x^3+1} = t$

$x^3 + 1 = t^2$

$3x^2 dx = 2t\, dt$ (05)

$x^3 = (t^2 - 1)$

$\begin{pmatrix} x = 0 \\ t = \sqrt{1} = 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = 2 \\ t = \sqrt{2^3+1} \\ = 3 \end{pmatrix}$ (05)

$\int_0^2 \frac{x^8}{\sqrt{x^3+1}} dx = \int_0^2 \frac{(x^3)^2 \; x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$ (05)

$= \int_1^3 \frac{(t^2-1)^2 \left(\frac{2}{3}\right) t\, dt}{t}$ (05)

$= \frac{2}{3} \int_1^3 (t^4 - 2t^2 + 1) dt$ (05)

$= \frac{2}{3} \left[\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + t \right]_1^3$ (05)

$= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{243}{5} - 18 + 3 \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) \right]$

$= \frac{2}{3} \left[\frac{242}{5} + \frac{2}{3} - 16 \right]$

$= \frac{2}{3} \left(\frac{726+10-240}{15} \right)$

$= \frac{2}{3} \left(\frac{496}{15} \right)$

$= \frac{992}{45}$ (05)

35

16 $l_1: x - \sqrt{3}y + 1 + k = 0$ and $l_2: x + \sqrt{3}y + 1 - k = 0$ are two given straight lines passing through the point $(-1,3)$ show that $k = 3\sqrt{3}$.

For that value of k, find the equations of the angle bisectors between the straight lines $l_1 = 0$ and $l_2 = 0$.

Let, l be the acute angle bisector of l_1 and l_2. Show that the point $A \equiv (2,3)$ lies on the line $l = 0$.

Find the equation of the circle S with centre A and the length of the diameter is 3 units.

Find the perpendicular distance from the point A to the line $l_1 = 0$, hence find the equation of the tangent drawn from $(-1,3)$ to the circle S.

From a point P on the line $l = 0$, two tangents are drawn to the circle S so that they are perpendicular to each other.

Show that there are two such points for P and in each case find the coordinates.

Further, find the area of the quadrilateral which enclosed by the tangents.

$l_1 = x - \sqrt{3}\,y + 1 + k = 0$

$(If\ parallel\ through\ (-1{,}3))$

$-1 - 3\sqrt{3} + 1 + k = 0$ (05)

$k = 3\sqrt{3}$ (05)

$l_2 = x + \sqrt{3}y + 1 - k = 0$

$-1 + 3\sqrt{3} + 1 - k = 0$ (05)

$k = 3\sqrt{3}$

$l_2 = x + \sqrt{3}y + 1 - 3\sqrt{3} = 0$

$\therefore l_1 = x - \sqrt{3}y + 1 + 3\sqrt{3} = 0$

$$\frac{|x - \sqrt{3}y + 1 + 3\sqrt{3}|}{2} = \frac{|x - \sqrt{3}y + 1 - 3\sqrt{3}|}{2}$$ (10)

$(+)\ x - \sqrt{3}y + 1 + 3\sqrt{3} = x + \sqrt{3}y + 1 - 3\sqrt{3}$

$6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}y$

$y = 3$ (05)

$(+)\ x - \sqrt{3}y + 1 + 3\sqrt{3} = -x - \sqrt{3}y - 1 + 3\sqrt{3}$

$2x = -2$

$x = -1$ (05)

$Consider\ \ y = 3\ then\ m = 0$ (05)

$l_1 = x - \sqrt{3}y + 1 + 3\sqrt{3} = 0$ $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (05)

$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - 0}{1+0}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1\ (\therefore y = 3\ is\ \ an\ acute\ angle\ bisector)$ (05)

(10) (05)

$A \equiv (2{,}3)\,lies\ an\ the\ line\ y = 3$ (05)

70

$S \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ (10)

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = \frac{9}{4}$

$4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 43 = 0$ (05)

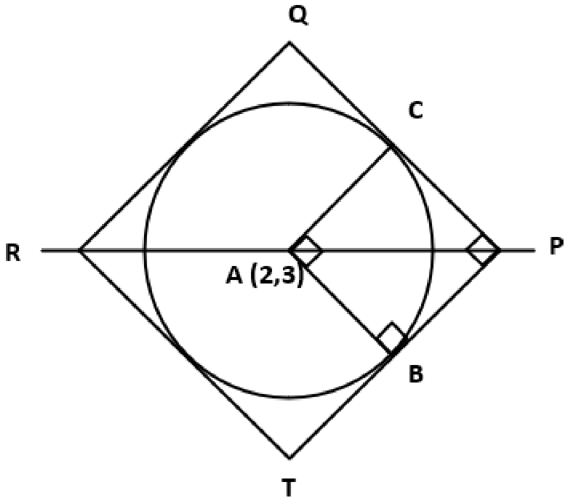
15

The perpendicular distance from A (2,3) to the line $(l_1 = 0)$ = $\frac{|2-3\sqrt{3}+1+3\sqrt{3}|}{2} = \frac{3}{2}$ (05)

(10)

$\therefore$ *equation of the tangents* $l_1 = 0, l_2 = 0$ (10)

25



The tangent are perpendicular to each other. Then ABPC is a square. (05)

$AB = AC = \frac{3}{2} \ \therefore AP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ($\because$ *P lies on* $y = 3$) (05)

(05)

$\therefore$ *the position of P are* $\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 3\right)$ *and* $\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 3\right)$

(05) (05)

since, tangents are perpendicular, PQRT is a square (05)

$\therefore$ *Area of* $ABPC = 3 \times 3 = 9$ *Square units.*

(05) (05)

40

17 (a) (i) Write down $\cos(A+B)$ In terms of $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$, $\sin B$ and obtain an expression for $\cos 3A$ in terms of $\cos A$.

(ii) Determine constants λ and k such that,

$$\frac{2\cos 3x - 4cos^5x + 3cos^3x}{cosx(1+sin^2x)} = \lambda \cos 2x + k$$

Hence, find the maximum and minimum values of

$$f(x) = \frac{2\cos 3x - 4cos^5x + 3cos^3x}{cosx(1+sin^2x)}$$

and sketch the graph of $y = f(x)$ for $x\epsilon[-\pi, \pi]$

(b) A point P is inside the triangle ABC, such that $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \alpha$

By applying **Sine Rule** for suitable triangles, write down two expressions for PC_1 and show that $cot\alpha = cotA + cotB + cotC$

(c) Solve the equation $2tan^{-1}(cosx) = tan^{-1}(2cosecx)$ for $x\epsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(a)(i) $cos(A+B) = cosAcosB - sinAsinB$

Substituting $B = 2A$ (05)

$cos3A = \cos(A+2A)$

$= cosAcos2A - sinAsin2A$ (05)

$= cosA(2cos^2A - 1) - sinA2sinAcosA$ (10)

$= 2cos^3A - cosA - 2cosA(1 - cos^2A)$ (05)

$= 2cos^3A - cosA - 2cosA + 2cos^3A$

$= 4cos^3A - 3cosA$ (05)

30

(ii) $\frac{2cos3x - 4cos^5x + 3cos^3x}{cosx(1+sin^2x)} = \frac{2(4cos^3x - 3cosx) - 4cos^5x + 3cos^3x}{cosx(1+sin^2x)}$ (05)

$= \frac{cosx(11cos^2x - 4cos^4x - 6)}{cosx(1+sin^2x)}$ (05)

$= \frac{11cos^2x - 4cos^4x - 6)}{1+sin^2x}$

$= \frac{(3-4cos^2x)(cos^2x-2)}{1+sin^2x}$ (05)

$= \frac{\left[3-4\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)\right]\left[1-sin^2x-2\right]}{1+sin^2x}$ (05)

$= \frac{-(1-2cos2x)(1+sin^2x)}{1+sin^2x}$

$= 2cos2x - 1$

$= \lambda cos2x + k$; where $\lambda = 2,\ k = -1$ (05)

$f(x) = \frac{2cos3x-4cos^5x+3cos^3x}{cosx(1+sin^2x} = 2cos2x - 1$

$-1 \leq cos2x \leq 1$

$-2 \leq 2cos2x \leq 2$

$-3 \leq 2cos2x - 1 \leq 1$

Maximum value = 1 minimum value = -3

(05) (05)

For maximum value

$2cos2x - 1 = 1$

$cos2x = 1$

$cos2x = cos0$

$2x = 2n\pi \,; n \in \mathbb{Z}$

$x = n\pi$

$when\ n = -1, \quad x = -\pi$

$when\ n = 0, \quad x = 0$

$when\ n = \pi, \quad x = \pi$

$(-\pi\,,1), (\pi\,,0), (\pi, 1)$

For minimum value

$2cos2x - 1 = -3$

$cos2x = -1$

$cos2x = cos\pi$

$2x = 2n\pi \pm \pi \;; n \in \mathbb{Z}$

$x = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$when\ n = 0,$

$x = \pm\frac{\pi}{2}$

$\left(-\frac{\pi}{2}, -3\right), \left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$

$when\ x = 0, \quad y = 1$

$when\ y = 0, \quad 2cos2x - 1 = 0$

$cos2x = \frac{1}{2}$

$cos2x = cos\frac{\pi}{3}$

$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

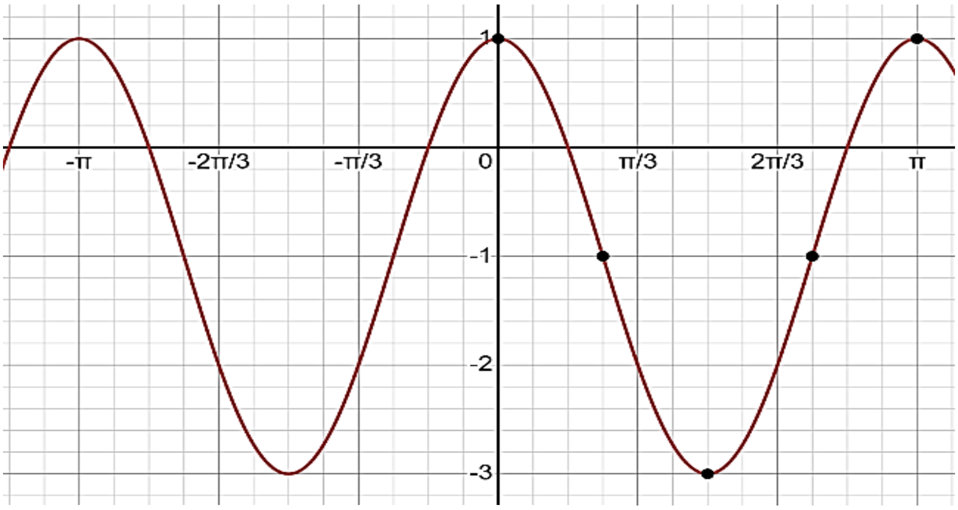
$x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$when\ n = 0, \quad x = \frac{\pm\pi}{6}$

$when\ n = 1, \quad x = \pi \pm \frac{\pi}{6}$

$when\ n = -1, \quad x = -\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$\left(\pm\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right), \left(-\frac{5\pi}{6}, 0\right)$



For maximum (05)

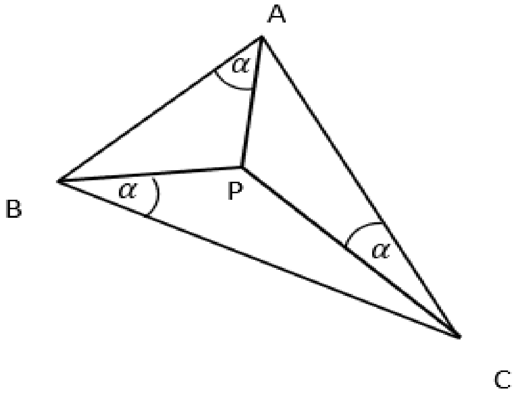
For minimum (05)

Point of intersection (05)

End points (05)

55

(b)



Applying Sin rule for triangle PBC

$\frac{PC}{sin\alpha} = \frac{a}{\sin{(180-c)}} \Rightarrow PC = \frac{asin\alpha}{sinc}$ (05) + (05)

Applying Sin rule for triangle PAC

$\frac{PC}{\sin{(A-\alpha)}} = \frac{b}{\sin{(180-A)}} \Rightarrow PC = \frac{bsin(A-\alpha)}{sinA}$ (05) + (05)

$\frac{asin\alpha}{sinc} = \frac{bsin(A-\alpha)}{sinA}$ (05)

$ksin^2Asin\alpha = ksinBsinCsin(A-\alpha) \quad ; k \neq 0$

$sinAsin(B+C)sin\alpha = sinBsinCsin(A-\alpha)$ (05)

$sinAsin\alpha(sinBcosC + cosBsinC) = sinBsinC(sinAcosa - cosAsin\alpha)$ (05)

$\frac{sinAsin\alpha(sinBcosC + cosBsinC)}{sinAsinBsinCsin\alpha} = \frac{sinBsinC(sinAcosa - cosAsin\alpha)}{sinAsinBsinCsin\alpha}$ (05)

$cotC + cotB = cot\alpha - cotA$ (05)

$cot\alpha = cotA + cotB + cotC$

45

(c)

$2tan^{-1}(cosx) = tan^{-1}2(cosecx)$

Let, take $tan^{-1}(cosx) = \alpha$

And$tan^{-1}2(cosecx) = \beta$

$tan\alpha = cosx$

$2\alpha = \beta$

$tan2\alpha = tan\beta$

$\frac{2tan\alpha}{1+tan^2\alpha} = 2cosecx$ (05)

$\frac{2cosx}{1-cos^2x} = 2cosecx$ (05)

$\frac{cosx}{1-cos^2x} = cosecx$

$\frac{cosx}{sin^2x} = \frac{1}{sinx}$

$sinxcosx - sin^2x = 0$

$tanx = 1 \because sinx \neq 0$ (05)

$tanx = tan\frac{\pi}{4}$

$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}\ ; n \in \mathbb{Z}$ (05)

20

***