සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education Ministry of Education Ministry of Education Ministry of Education Ministry of Education Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2022

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 S II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.
* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II

කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

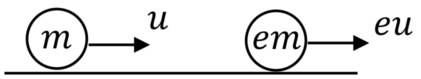
ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න

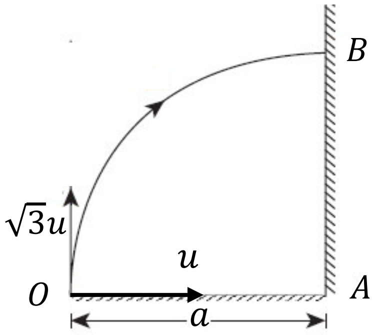
1. A හා B අංශු දෙකක් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e\ (0 < e < 1)$ ද ස්කන්ධ පිලිවෙලින් m හා em ද වේ. A හා B අංශු එකම තිරස් සරල රේඛාවක් දිගේ පිලිවෙලින් u හා eu ඒකකාර ප්‍රවේග වලින් එකම දිශාවට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු B හි ප්‍රවේගය e ගෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. ගැටුම නිසා $\frac{6}{25}mu$ විශාලත්වයකින් යුත් ආවේගයක් ඇති වේ නම් e හි අගයන් සොයන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තිරස් තලයක පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයක සිට පිළිවෙලින් u හා $\sqrt{3}u$ තිරස් හා සිරස් ප්‍රවේග සංරචක වලින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව සිය පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට ලගාවන විට O සිට a තිරස් දුරින් පිහිටි සිරස් AB බිත්තියක වූ B ලක්ෂ්‍යයේ වැදී පොලා පනී. සිරස් තලය හා අංශුව අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ නම්,

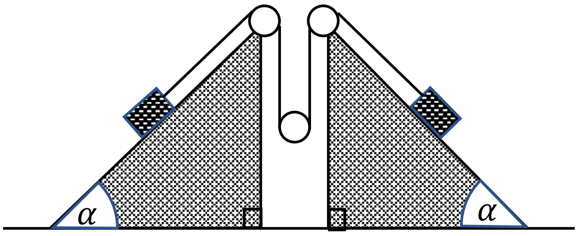
(i) අංශුව නැවත OA තලයේ වැදීමට ආරම්භයේ සිට ගතවන කාලය,

(ii) අංශුව නැවත OA තලය මත පතිත වන ස්ථානයට A සිට දුර ද, සොයන්න.



විභාග අංකය | | | | | | | |

3. රූප සටහනේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධයන් m_1 හා m_2 වූ අංශු දෙකක් **අචල,** සුමට කූඤ්ඤ දෙකක් මත තබා ඇත. m_1 අංශුවට ඈඳන ලද ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් අචල සුමට කප්පියක් මතින් යවා ස්කන්ධය M සුචල සුමට කප්පිය යටින් ගමන් කර නැවත අචල කප්පියක් මතින් ගොස් m_2 අංශුවට ඈඳ ඇත. අංශු හා තන්තුව එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුවල ත්වරණත් තන්තුවේ ආතතියත් සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. කූඤ්ඤ දෙකෙහිම ආනත පෘෂ්ඨ වල ආනතිය α වේ. (නිදහස්ව ඇති තන්තු කොටස් සිරස්ව හෝ කූඤ්ඤ වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා ඔස්සේ හෝ වේ.)



4. ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 2 ක් වූ මෝටර් රථයක් තිරසට $sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ ආනතියකින් යුත් සෘජු මාර්ගයක් දිගේ $32\ km\ h^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙන් ඉහලට ගමන් කරයි. චලිතයට 400 N ක නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. රථයේ ජවය කිලෝවොට් වලින් සොයන්න.

මෙම රථය එම ජවයෙන් සහ එම නියත ප්‍රතිරෝධයෙන්ම සමතලා මාර්ගයක ගමන් කරයි. රථයේ ප්‍රවේගය $32\ km\ h^{-1}$ වන විට එහි ත්වරණය සොයන්න. ($g = 10\ m\ s^{-2}$ යැයි ගන්න)

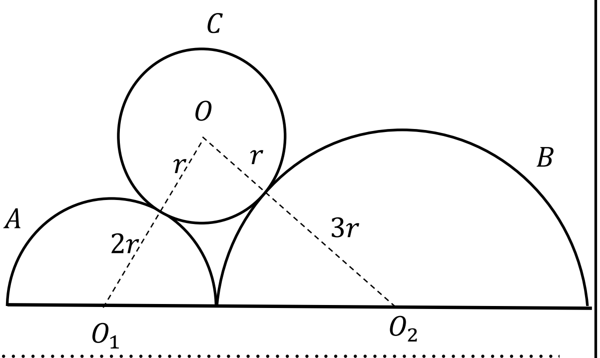
5. දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙලවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර, අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඈඳා ඇත. O සමග එකම තිරස් මට්ටමේ $\frac{a}{2}$ තිරස් දුරින් වූ ලක්ෂ්‍යයක සිට එම අංශුව නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හැරේ. තන්තුව තදවී මොහොතකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයා, තන්තුව සිරස් වන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීමට සමීකරණයක් ශක්ති සංස්ථිති නියමය ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6. O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ හා $-2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ වේ. මෙහි $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ යනු OX හා OY අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික වේ. AB රේඛාව $AC{:}CB = 1{:}2$ අනුපාතයට බෙදන C ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. OC රේඛාව හා OY අක්ෂය අතර කෝණය 60° නම් $x^2 + y^2 + 4xy = 0$ බව පෙන්වන්න.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

7. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරයයන් පිළිවෙලින් 2r හා 3r වූ එකිනෙක ස්පර්ශව පවතින A හා B අචල සුමට අර්ධ ගෝල මත අරය r වූ ද ස්කන්ධය m වූ ද සුමට C ගෝලයක් සමතුලිතව තබා ඇත. C ගෝලය මත A හා B අර්ධ ගෝල මගින් ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. O, O_1 හා O_2 කේන්ද්‍ර එකම සිරස් තලයක පිහිටයි.



....

8. AB දණ්ඩක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය වන G, $AG:GB = 2:1$ අනුපාතයට වේ. එහි A කෙළවර රළු තිරස් තලයක් මත ද B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක් හා ස්පර්ශ වෙමින් ද දණ්ඩ, බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී. දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය θ ද තලය හා දණ්ඩේ A කෙළවර අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ ද වේ. $tan\theta$ හි අගය μ ඇසුරින් ලබාගන්න.

....

9. A හා B යනු පහත අවස්ථා සපුරාලනු ලබන සිද්ධි දෙකකි.

(i) A පමණක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාවය 0.2 වේ.

(ii) B පමණක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාවය 0.1 වේ.

(iii) A හෝ B දෙකෙන් එකක් වත් සිදු නොවීමේ සම්භාවිතාවය 0.6 වේ.

$P(A/B) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

10. සංඛ්‍යා දහයක මධ්‍යන්‍යය $9 \cdot 4$ වේ. k තාත්වික සංඛ්‍යාවක සිට එම සංඛ්‍යාවල අපගමනයන් පහත පරිදි වේ.

d_i: -5, -2, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 6

සංඛ්‍යා දහයෙහි මධ්‍යස්ථය හා විචලතාව සොයන්න.

[හත්වැනි පිටුව බලන්න

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2022

සංයුක්ත ගණිතය	II
இணைந்த கணிதம்	II
Combined Mathematics	II

10 S II

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

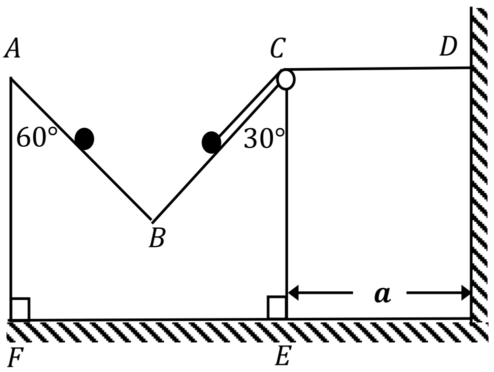
(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (a) A නම් දුම්රිය ස්ථානයක සිට $u\ km\ h^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් චලිතය අරඹන P නම් දුම්රියක්, ඒකාකාර ත්වරණයෙන් පැය බාගයක් ගමන් කර ඉන්පසු තවත් පැයක් $f\ km\ h^{-2}$ ඒකකාර මන්දනයෙන් ගමන් කර B දුම්රිය ස්ථානයේ දී නිසලතාවයට පැමිණේ. P දුම්රිය, B වෙත ළඟාවන මොහොතේ දී ම Q නම් වෙනත් දුම්රියක්, B දුම්රිය ස්ථානයේ සිට A දුම්රිය ස්ථානය දෙසට නිශ්චලතාවයේ සිට චලිතය අරඹයි. Q දුම්රිය පැය බාගයක් P දුම්රියේ ආරම්භක ඒකකාර ත්වරණයෙන්ම ගමන් කර ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන්, A දුම්රිය ස්ථානයේ නොනවත්වා ම ධාවනය කරයි. P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක දක්වන්න.

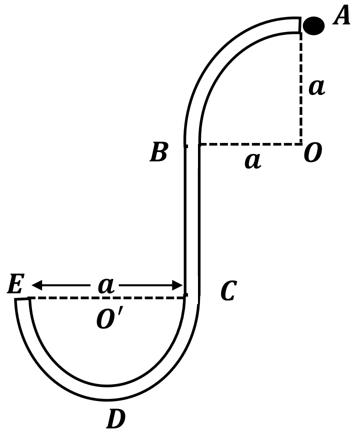
ඒ නයින්, P දුම්රියේ ත්වරණය සොයා Q දුම්රිය සිය චලිතය අරඹා $\frac{f}{f-u}\ h$ කාලයකට පසු එය A දුම්රිය ස්ථානය පසු කරන බව පෙන්වන්න.

(b) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $u\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක S ගෙන් $d\ km$ දුරක් බටහිරින් A බෝට්ටුවක් ද $2d\ km$ දුරක් නැගෙනහිරින් B බෝට්ටුවක් ද පිහිටයි. A බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $\frac{3u}{2}\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක S නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරන අතර B බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $2u\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක S නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරයි. A හා B හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ වෙන වෙනම ඇඳීමෙන් මුලින්ම නැව අල්ලා ගන්නේ කුමන බෝට්ටුව දැයි සොයන්න.

12. (a) රූපයේ දැක්වෙන්නේ සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය M වූ සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ, බිත්තියට ලම්බ සිරස් හරස්කඩ වේ. AB හා BC රේඛා ඒවා අඩංගු මුහුණත් වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. D යනු කුඤ්ඤයේ සිට a දුරින් පිහිටි සිරස් බිත්තිය මත, A හා C සමඟ එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍යය වේ. මෙහි $F\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$, $F\hat{A}B = \frac{\pi}{6}$ සහ $A\hat{F}E = C\hat{E}F = \frac{\pi}{2}$ වේ. C හි පිහිටි අචල සුමට කප්පිය මතින් යන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර D ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇත. ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක් AB මුහුණත මත අල්වා තබා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. එක් අංශුවක් හෝ B වෙත ළඟාවීමට ප්‍රථම කුඤ්ඤය බිත්තිය වෙත ළඟාවේ නම්, කුඤ්ඤය බිත්තිය වෙත ළඟාවීමට ගතවන කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



(b) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ සුමට තුනී නලයක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. AB කොටස කේන්ද්‍රය O වූ ද අරය a වූ ද වෘත්තයක $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$ පරිදි වූ වෘත චාපයකි. BC යනු දිග a වූ සිරස් කොටසක් වේ. CDE යනු විශ්කම්භය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසකි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A හි තබා සීරුවෙන් නලය තුලට මුදහරී.



(i) A සිට B දක්වා P හි චලිතයේ දී OA සමග θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් OP සාදන විට, එහි වේගය v නම් $v^2 = 2ga(1 - cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) P මත නලය මගින් ඇතිකෙරෙන අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව R නම්, R සොයන්න. තවද θ හි අගය $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ දී R හි දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වන බව පෙන්වන්න.

(iii) E හිදී ප්‍රවේගය සොයා අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $8mg$ වන බව පෙන්වන්න.

13. A, B, C, D, E හා F යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත $AB = BC = CD = DE = l$ හා $EF = 2l$ වන පරිදි සරල රේඛීයව පිහිටි ලක්ෂ්‍ය හයකි. දිග $4l$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් A හා F ලක්ෂ්‍ය සම්බන්ධ කර, මේසය මත චලනය විය හැකි ස්කන්ධය m වූ P සුමට අංශුවක් D හිදී තන්තුවට සවිකර ඇත. අංශුව B වෙත ඇද නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. අංශුව t කාලයකදී A සිට E දෙසට x, $(l \leq x \leq 2l)$ දුරක් විස්ථාපනය වේ නම් අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \frac{\lambda}{2ml}(x - 4l) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය වේ.

(i) $X = x - 4l$ ලෙස ගැනීමෙන් $\ddot{X} + \frac{\lambda}{2ml}X = 0$ බව පෙන්වන්න.
ඉහත සමීකරණයේ විසදුම් $X = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් α, β හා ω නියතවල අගයයන් සොයන්න.
ඒ නයින්, අංශුව $\sqrt{\frac{2lm}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ කාලයකට පසු $\sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$ ප්‍රවේගයෙන් C ලක්ෂ්‍යය පසු කරන බව පෙන්වන්න.

(ii) $2l \leq x \leq 4l$ සදහා Y සුදුසු ලෙස තෝරාගැනීමෙන්, අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{Y} + \frac{\lambda}{ml}Y = 0$ යන්නෙන් දෙනු ලබනු බව පෙන්වන්න.
ඉහත සමීකරණයේ විසදුම් $Y = \alpha'\cos(\omega'(t - t_0)) + \beta'\sin(\omega'(t - t_0))$ ආකාරයෙන් පවතී යැයි උපකල්පනය කරමින් α', β' හා ω' නියත වල අගයයන් සොයන්න. මෙහි $t_0 = \sqrt{\frac{2lm}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ වේ.

(iii) ආරම්භයේ සිට P අංශුව E ලක්ෂ්‍යය වෙත පළමු වරට පැමිණීමට ගතවන කාලය $2\sqrt{\frac{l}{m}}\left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.

[නවවැනි පිටුව බලන්න.

14. (a) O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් P හා Q ලක්ෂ්‍ය වල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{\mathbf{p}}$ හා $\underline{\mathbf{q}}$ වේ. L යනු $OL:LP = 3:4$ වන පරිදි OP මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද N යනු $ON:NQ = 5:2$ වන පරිදි OQ මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද වේ. PN සහ QL රේඛා වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය M නම් $\overrightarrow{OM} = \underline{\mathbf{q}} + \lambda\left(3\underline{\mathbf{p}} - 7\underline{\mathbf{q}}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අදිශයකි.

$\overrightarrow{OM}$ සඳහා තවත් ප්‍රකාශනයක් ලබා ගැනීමෙන් M ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{\mathbf{p}}$ හා $\underline{\mathbf{q}}$ ඇසුරින් සොයන්න.

(b) XY තලයේ O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් ක්‍රියාකරන බල තුනකින් සමන්විත ඒකතල බල පද්ධතියක් පහත දැක්වේ.

ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$3a\,\boldsymbol{i} + 2a\,\boldsymbol{j}$	$4P\,\boldsymbol{i} + 3P\,\boldsymbol{j}$
B	$-a\,\boldsymbol{i}$	$-P\,\boldsymbol{i} + 4P\,\boldsymbol{j}$
C	$-a\,\boldsymbol{j}$	$5P\,\boldsymbol{i} - P\,\boldsymbol{j}$

මෙහි $\boldsymbol{i}$ හා $\boldsymbol{j}$ යනු සුපුරුදු අංකනයෙන් පිළිවෙලින් OX හා OY අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික ද P හා a යනු පිළිවෙලින් නිව්ටන් හා මීටර් වලින් මනින ලද ධන රාශි ද වේ.

පද්ධතිය විශාලත්වය $10P$ N තනි බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වා එම තනි බලයේ දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එම තනි බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $4y = 3x + 6a$ බවට පත් කිරීම සඳහා පද්ධතියට එක් කළ යුතු යුග්මයේ විශාලත්වයත් දිශාවත් සොයන්න.

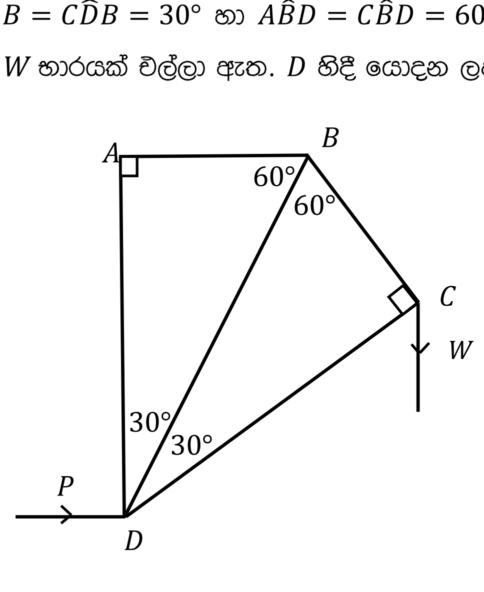
15. (a) AB, BC හා AC ඒකාකාර දඬු තුනක් ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ අග්‍ර වලදී සුවල ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC දඬු වල බර W බැගින් වන අතර AC හි බර $2W$ වේ. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇත. AC දණ්ඩ සිරසට දරණ ආනතිය θ වේ. $tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

θ ඇසුරෙන් B සන්ධියේ දී AB මත ප්‍රතික්‍රියාව සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(b) AB, BC, CD, DA හා BD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර රූපයේ දැක්වෙන පරිදි වූ රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත. මෙහි $AB = BC, AD = CD,$ $A\hat{D}B = C\hat{D}B = 30°$ හා $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 60°$ වේ. රාමු සැකිල්ල A හිදී සුමට ලෙස අසව් කර ඇති අතර C හිදී W භාරයක් එල්ලා ඇත. D හිදී යොදන ලද P තිරස් බලයක් මගින් AB තිරස්ව හා AD සිරස්ව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතී. **බෝ අංකනය** භාවිතයෙන් C, B හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, එමගින්,

(i) දඬු වල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වන්න.

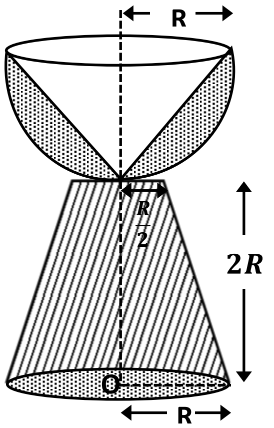
(ii) P බලයේ විශාලත්වයත් A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.



16.

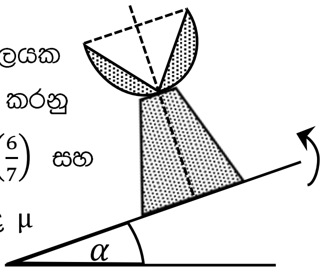
(i) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි තල ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් ද

(ii) උස h වූ ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ $\frac{1}{4}h$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, උඩත් හා යටත් වෘත්තාකාර ගැටිවල අරයන් පිළිවෙළින් $\frac{R}{2}$ හා R වූ ද උස $2R$ වූ ද ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතු ජින්නකයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර කොන්ක්‍රීට් කුට්ටියක් සහ අරය R වූ ඝන අර්ධ ගෝලාකාර කබොලක් ඒවායේ අක්ෂ සිරස්ව සහ සමපාත වන පරිදි දෘඪව සවිකිරීමෙන් මල් පෝච්චියක් සාදා ඇත. මෙම අර්ධ ගෝලාකාර කබොල නිමවා ඇත්තේ අරය R වූ ඝන අර්ධ ගෝලයකින්, අරය R සහ උස R බැගින් වූ ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුක කොටසක් හාරා ඉවත් කිරීමෙනි. ජින්නකය හා අර්ධ ගෝලාකාර කබොල ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය σ වූ එකම ද්‍රව්‍යයෙන් නිමවා ඇත.

මල් පෝච්චියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{7R}{6}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි මල් පෝච්චියේ පහල වෘත්තාකාර මුහුණත ආනත රළු තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාව ස්පර්ශ වන පරිදි තබා ඇත. දැන්, තලය සෙමෙන් උඩු අතට ඇල කරනු ලැබේ. මල් පෝච්චිය ආනත තලය මත සමතුලිතව පැවතීමට නම් $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)$ සහ $\mu \geq \tan\alpha$ විය යුතු බව පෙන්වන්න. මෙහි α යනු ආනත තලයේ තිරසට ආනතිය ද μ යනු මල් පෝච්චිය හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය ද වේ.

17. (a) නිෂ්පාදන ආයතනයක ඇති A, B හා C ලෙස තත්වයෙන් ශ්‍රේණිගත කර ඇති පෙනුමෙන් සමාන විදුලි බුබුලු සහිත පෙට්ටි 1: 2: 2 අනුපාතයට ඇත. මෙම ශ්‍රේණි තුනෙහිම දෝෂ සහිත සහ දෝෂ රහිත ලෙස විදුලි බුබුලු වර්ග දෙකක් හමුවේ.

A, B හා C ශ්‍රේණිවල දෝෂ සහිත විදුලි බුබුලු හමුවීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් 0.00, 0.10, හා 0.20 වේ. අහඹු ලෙස තෝරාගත් පෙට්ටියකින් බල්බ දෙකක් අහඹු ලෙස තෝරා ගෙන පරීක්ෂා කරනු ලැබේ.

(i) තෝරා ගත් බල්බ දෙකම දෝෂ රහිත විදුලි බුබුලු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) තවද පරීක්ෂාවට භාජනය කල විදුලි බුබුලු දෙකම දෝෂ රහිත විදුලි බුබුලු නම්, එය B ශ්‍රේණියේ පෙට්ටියකින් ගත් බල්බයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) එක්තරා පරීක්ෂණයකට පෙනී සිටි සිසුන් 70 දෙනෙකු ලබාගන්නා ලද ලකුණු වල සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක පන්ති ලකුණු සහ එක් එක් පන්ති ලකුණට අදාල සංඛ්‍යාත පහත වගුවේ දැක්වේ. සමත් වීමේ ලකුණ 35 වේ.

පන්ති ලකුණ	සංඛ්‍යාතය
35	05
45	10
55	15
65	30
75	05
85	05

$y_i = \frac{1}{10}(x_i - 55)$ යන පරිණාමනය භාවිතයෙන් මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාවය නිමානය කරන්න.

මෙම පරීක්ෂණයට පෙනී සිටි මුළු සිසුන් ගණන 100 ක් වන අතර මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් **48** හා **21.5** ලෙස දී ඇත. අසමත් සිසුන් 30 දෙනාගේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

***

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

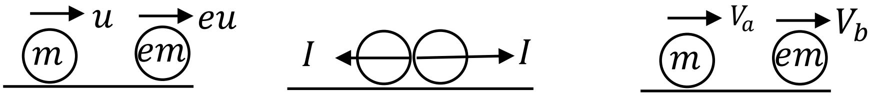
අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2022

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

1. A හා B අංශු දෙකක් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e $(0 < e < 1)$ ද ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m, em ද වේ. A හා B අංශු එකම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙලින් u හා eu ඒකාකාර ප්‍රවේග වලින් එකම දිශාවට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු B හි ප්‍රවේගය e ගෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. ගැටුම නිසා $\frac{6}{25}mu$ විශාලත්වයකින් යුත් ආවේගයක් ඇති වේ නම් e හි අගය සොයන්න.



$I = \Delta(mv) \longrightarrow$ for the system

$0 = (mVa + emVb) - (mu + emeu)$ (5)

$Va + eVb = u + e^2u \longrightarrow (1)$

Newton's Experimental Law for the system ⟶

$Vb - Va = -e(eu - u) \longrightarrow (2)$ (5)

$(1) + (2) \longrightarrow (1+e)Vb = (1+e)u$

$Vb = u$ (5)

Therefore, Velocity of B is independent from e.

$I = \Delta(mv) \longrightarrow$ for B

$I = emVb - emeu = \frac{6}{25}mu$ (5)

$eu - e^2u = \frac{6u}{25} \longrightarrow 25e^2 - 25u + 6 = 0$

$(5e-3)(5e-2) = 0$

$e = \frac{3}{5}$ or $e = \frac{2}{5}$ (5)

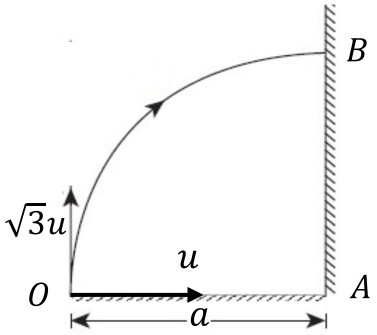
25

---

2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තිරස් තලයක පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයක සිට පිළිවෙලින් u හා $\sqrt{3}u$ තිරස් හා සිරස් ප්‍රවේග සංරචක වලින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව සිය පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට ලගාවන විට O සිට a තිරස් දුරින් පිහිටි සිරස් AB බිත්තියක වූ B ලක්ෂ්‍යයේ වැදී පොලා පනී. සිරස් තලය හා අංශුව අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ නම්,

(i) අංශුව නැවත OA තලයේ වැදීමට ආරම්භයේ සිට ගතවන කාලය,

(ii) අංශුව නැවත OA තලය මත පතිත වන ස්ථානයට A සිට දුර ද, සොයන්න.



for the motion $O - B$

$\uparrow v = u + at$

$0 = \sqrt{3}u - gt_1 \longrightarrow t_1 = \frac{\sqrt{3}u}{g}$ (5)

OR

$\longrightarrow s = ut$

$a = ut_1$

$t_1 = \frac{a}{u}$ (5)

for the motion $O - B$

$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$

$0 = (\sqrt{3}u)^2 - 2gh$

$h = \frac{3u^2}{2g}$ (5)

$\downarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\frac{3u^2}{2g} = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2 \longrightarrow t_2 = \frac{\sqrt{3}u}{g} = \frac{a}{u}$ (5)

$T = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{3}u}{g}$ or $\frac{2a}{u}$ (5)

$\leftarrow s = ut$

$s = \frac{1}{2}ut_2$

$s = \frac{1}{2}u.\frac{a}{u}$

$s = \frac{u}{2}$ (5)

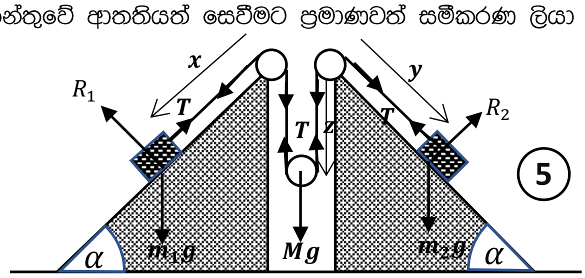
Note:

Since the same vertical distance T=$2t_1$

$\therefore\ T = \frac{2a}{u}$

25

3. රූප සටහනේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධයන් m_1 හා m_2 වූ අංශු දෙකක් **අචල,** සුමට කූඤ්ඤ දෙකක් මත තබා ඇත. m_1 අංශුවට ඈඳන ලද ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් අචල සුමට කප්පියක් මතින් යවා ස්කන්ධය M සුචල සුමට කප්පිය යටින් ගමන් කර නැවත අචල කප්පියක් මතින් ගොස් m_2 අංශුවට ඈඳා ඇත. අංශු හා තන්තු සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුවල ත්වරණත් තන්තුවේ ආතතියත් සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. කූඤ්ඤ දෙකෙහිම ආනත පෘෂ්ඨ වල ආනතිය α වේ.
(නිදහස්ව ඇති තන්තු කොටස් සිරස් හො කූඤ්ඤ වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව ඔස්සේ වේ.)



(5)

$x + y + 2z + k = l$

$\ddot{x} + \ddot{y} + 2\ddot{z} = 0$ ----- (5)

$f = ma$

for m_1 ↙ $m_1 g\, sin\alpha - T = m_1 \ddot{x}$ ------ (5)

for m_2 ↘ $m_2 g\, sin\alpha - T = m_2 \ddot{y}$ ------ (5)

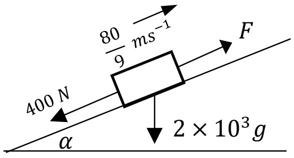
for M ↓ $Mg - 2T = M\ddot{z}$ -------------- (5)

25

---

4. ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 2 ක් වූ මෝටර් රථයක් තිරසට $sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ ආනතියකින් යුත් සෘජු මාර්ගයක් දිගේ නියත 32 $km\,h^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් ඉහලට ගමන් කරයි. චලිතයට 400 N ක නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. රථයේ ජවය කිලෝවොට් වලින් සොයන්න.

මෙම රථය එම ජවයෙන් සහ එම නියත ප්‍රතිරෝධයෙන් සමතලා මාර්ගයක ගමන් කරයි. රථයේ ප්‍රවේගය 32 $km\,h^{-1}$ වන විට එහි ත්වරණය සොයන්න. ($g = 10\,m\,s^{-2}$යැයි ගන්න)



$32\,km\,h^{-1} = \frac{80}{9}\,ms^{-1}$ (5)

$f = ma$

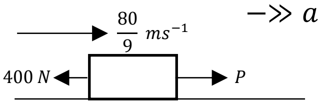
$F - 400 - 20000\, sin\alpha = 0$

$F = 2400\,N$ (5)

$H = FV$

$H = 2400 \times \frac{80}{9} = \frac{64}{3}\,kW$ (5)

$\rightarrow\!\!\!\gg a$



$H = FV$

$\frac{64000}{3} = P \times \frac{80}{9}$

$P = 2400\,N$ (5)

$f = ma$ ⟶

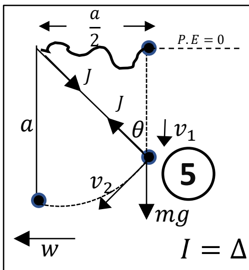
$2400 - 400 = 2000a$

$a = 1\,ms^{-2}$ (5)

25

---

5. දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙලවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර, අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඈඳා ඇත. O සමග එකම තිරස් මට්ටමේ $\frac{a}{2}$ තිරස් දුරින් වූ ලක්ෂ්‍යයක සිට එම අංශුව නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හැරේ. තන්තුව ගැස්සීමෙන් මොහොතකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයා, තන්තුව සිරස් වන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීමට සමීකරණයක් ශක්ති සංස්ථිති නියමය ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.



$sin\theta = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} = \frac{1}{2}$ ⟶ $\theta = \frac{\pi}{6}$ (5)

$v^2 = u^2 + 2as$ ↓

${v_1}^2 = 0 + 2ga\, cos\frac{\pi}{6}$

${v_1}^2 = \sqrt{3}\, ga$ (5)

(5)

$I = \Delta(mv)$ perpendicular to the string

$mv_2 - mv_1 sin\frac{\pi}{6} = 0$

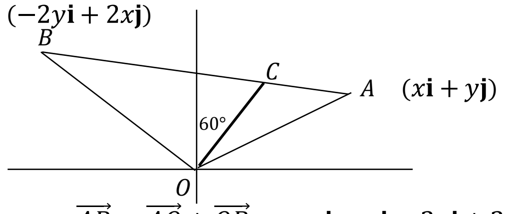
$v_2 = \frac{\sqrt{\sqrt{3}\, ga}}{2}$ (5)

conservation of energy

$\frac{1}{2}mw^2 - mga = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - mgacos\theta$ (5)

25

6. O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ හා $-2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ වේ. මෙහි **i** හා **j** යනු OX හා OY අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික වේ. AB රේඛාව $AC: CB = 1: 2$ අනුපාතයට බෙදන C ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. OC රේඛාව හා OY අක්ෂය අතර කෝණය $60°$ නම් $x^2 + y^2 + 4xy = 0$ බව පෙන්වන්න.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - 2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = -(x + 2y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\,[-(x + 2y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \frac{1}{3}\,[-(x + 2y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\{(x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}\} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OC}.\mathbf{j} = |\overrightarrow{OC}|.|\mathbf{j}|.\cos 60° \quad (5)$$

$$\frac{2}{3}\{(x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}\}.\mathbf{j} = \sqrt{\left(\frac{2x - 2y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x + 2y}{3}\right)^2}\,.1.\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{2x + 2y}{3} = \frac{2\sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2}}{6}$$

$$2(x + y) = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

$$4(x + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

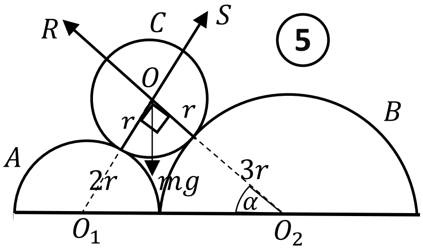
$$4x^2 + 4y^2 + 8xy = 2x^2 + 2y^2$$

$$x^2 + y^2 + 4xy = 0 \quad (5)$$

25

---

7. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරයන් පිළිවෙලින් 2r හා 3r වූ එකිනෙක ස්පර්ෂව පවතින A හා B අචල සුමට අර්ධ ගෝල මත අරය r වූ ද ස්කන්ධය m වූ ද සුමට C ගෝලයක් සමතුලිතව තබා ඇත. C ගෝලය මත A හා B අර්ධ ගෝල මගින් ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. O, O_1 හා O_2 කේන්ද්‍ර එකම සිරස් තලයක පිහිටයි.



(5)

$$O_1\hat{O}O_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \text{ and } \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

for the equilibrium of C,

↗ $S = mg\cos\alpha$ (5)

$S = \frac{4mg}{5}.$ (5)

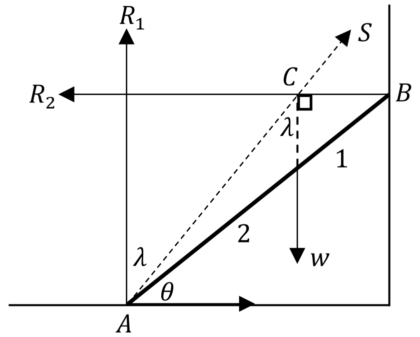
↖ $R = mg\sin\alpha$ (5)

$R = \frac{3mg}{5}.$ (5)

25

---

8. AB දණ්ඩක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය $2: 1$ අනුපාතයට වේ. එහි A කෙළවර රළු තිරස් තලයක් මත ද B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක් හා ස්පර්ශ වෙමින් දණ්ඩ, බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී. දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය θ ද තලය හා දණ්ඩේ A කෙළවර අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ ද වේ. $\tan\theta$ හි අගය μ ඇසුරින් ලබාගන්න.



(5)

Applying cot *theorem for the triangle ABC,*

$$(2 + 1)\cot(90 - \theta) = 2\cot\lambda - 1\cot 90° \quad (10)$$

$$3\tan\theta = \frac{2}{\tan\lambda} \quad (5)$$

$$\tan\theta = \frac{2}{3\mu} \quad (5)$$

25

9. A හා B යනු පහත අවස්ථා සපුරාලනු ලබන සිද්ධි දෙකකි.

(i) A පමණක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාවය 0.2 වේ.

(ii) B පමණක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාවය 0.1 වේ.

(iii) A හෝ B දෙකෙන් එකක් වත් සිදු නොවීමේ සම්භාවිතාවය 0.6 වේ.

$P(A/B) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$P(A \cap B') = 0.2\,, P(A' \cap B) = 0.1\,, P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 0.6$ (5)

$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$ (5)

$0.2 + 0.1 = (1 - 0.6) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0.1$ (5)

$P(A' \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$

$P(B) = 0.1 + 0.1 = 0.2$ (5)

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A/B) = \frac{0.1}{0.2}$

$P(A/B) = \frac{1}{2}$ (5)

25

---

10. සංඛ්‍යා දහයක මධ්‍යන්‍යය $9 \cdot 4$ වේ. k තාත්වික සංඛ්‍යාවක සිට එම සංඛ්‍යාවල අපගමනයන් පහත පරිදි වේ.

d_i: -5, -2, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 6

සංඛ්‍යා දහයෙහි මධ්‍යස්ථය හා විචලතාව සොයන්න.

d_i	-5	-2	-1	-1	-1	0	1	1	2	6
x_i	k-5	k-2	k-1	k-1	k-1	k	K+1	K+1	K+2	K+6

$where, d_i = x_i - k - - - \rightarrow x_i = d_i + k$ (5)

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{10} = 9.4\ (given)$

$\frac{10k - 10 + 10}{10} = 9.4$

$k = 9.4$ (5)

x_i	4.4	7.4	8.4	8.4	8.4	9.4	10.4	10.4	11.4	15.4

(5)

$Median = \frac{8.4 + 9.4}{2} = 8.9$ (5)

$\overline{\mathrm{d}} = \overline{\mathrm{x}} - k = 0$

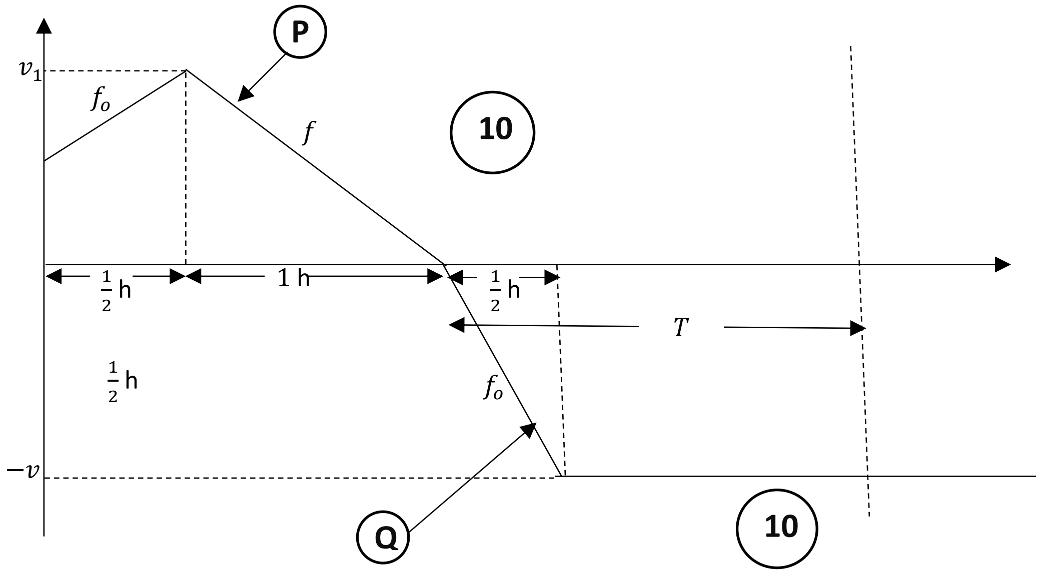
$\sigma_x{}^2 = \sigma_d{}^2 = \frac{\sum d_i{}^2}{10} - \overline{d}$

$\sigma_x{}^2 = \frac{74}{10} - 0 = 7.4$ (5)

25

11. (a) A නම් දුම්රිය ස්ථානයක සිට u ප්‍රවේගයෙන් චලිතය අරඹන P නම් දුම්රියක්, ඒකාකාර ත්වරණයෙන් පැය බාගයක් ගමන් කර ඉන්පසු තවත් පැයක් f ඒකකාර මන්දනයෙන් ගමන් කර B දුම්රිය ස්ථානයේ දී නිසලතාවයට පැමිණේ. P දුම්රිය, B වෙත ලගාවන මොහොතේ දී ම Q නම් වෙනත් දුම්රියක්, B දුම්රිය ස්ථානයේ සිට A දුම්රිය ස්ථානය දෙසට නිශ්චලතාවයේ සිට චලිතය අරඹයි. Q දුම්රිය පැය බාගයක් P දුම්රියේ ආරම්භක ඒකකාර ත්වරණයෙන්ම ගමන් කර ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන්, A දුම්රිය ස්ථානයේ නොනවත්වා ම ධාවනය කරයි. P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක දක්වන්න.

ඒ නයින්, P දුම්රියේ ත්වරණය සොයා Q දුම්රිය සිය චලිතය අරඹා $\frac{f}{f-u}$ කාලයකට පසු එය A දුම්රිය ස්ථානය පසු කරන බව පෙන්වන්න.



20

$$tan\alpha = \frac{v_1 - u}{\frac{1}{2}} = f_o \longrightarrow f_o = 2(v_1 - u) \text{------[1]} \quad (5)\ (5)$$

$$tan\beta = \frac{v_1}{1} = f \longrightarrow v_1 = f \quad (5)$$

$$f_o = 2(f-u). \quad (5)$$

20

$$tan\gamma = \frac{v}{\frac{1}{2}} = f_o \longrightarrow 2v = f_o \longrightarrow v = \frac{f_o}{2} = f - u \quad (5)\ (5)$$

$$S_p = S_Q \quad (5)$$

$$(5)\quad \frac{(u+v_1)}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times 1 \times v_1\right) = \left(\frac{T + T - \frac{1}{2}}{2}\right) v \quad (5)$$

$$\left(\frac{u+f}{4}\right) + \frac{f}{2} = \frac{(4T-1)}{4}(f-u)$$

$$u + f + 2f = (4T-1)(f-u)$$

$$\frac{u+3f}{f-u} = 4T - 1 \quad (5)$$

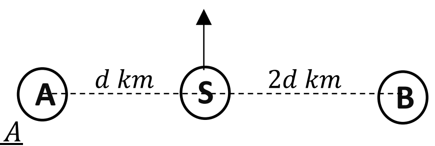
$$4T = \frac{4f}{f-u}$$

$$T = \frac{f}{f-u} \quad (5)$$

35

(b) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $u\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක S ගෙන් $d\ km$ දුරක් බටහිරින් A බෝට්ටුවක් ද $2d\ km$ දුරක් නැගෙනහිරින් B බෝට්ටුවක් ද පිහිටයි. A බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $\frac{3u}{2}\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක S නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරන අතර B බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $2u\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක S නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරයි. A හා B හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ වෙන වෙනම ඇඳීමෙන් මුලින්ම නැව අල්ලා ගන්නේ කුමන බෝට්ටුව දැයි සොයන්න.

$V_{SE} = u \uparrow \quad V_{AE} = \frac{3u}{2} \quad V_{BE} = 2u$

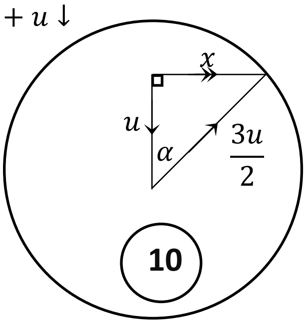


For A

$V_{AS} = \rightarrow$

$V_{AS} = V_{AE} + V_{ES}$ (5)

$\rightarrow x \;=\; \frac{3u}{2} + u \downarrow$ (5)

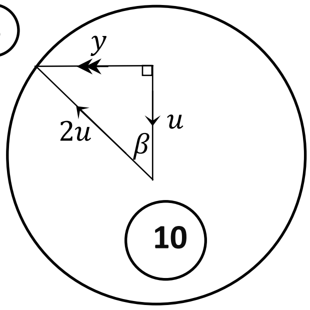


For B

$V_{BS} = \leftarrow$ (5)

$V_{BS} = V_{BE} + V_{ES}$

$\leftarrow y \;=\; 2u + u \downarrow$ (5)



$x^2 = \left(\frac{3u}{2}\right)^2 - u^2 = \frac{5u^2}{4}$

$x = \frac{\sqrt{5}\,u}{2}$ (5)

$t_A = \frac{d}{\left(\frac{\sqrt{5}\,u}{2}\right)} = \frac{2d}{\sqrt{5}\,u}$ (10)

$y^2 = (2u)^2 - u^2 = 3u^2$

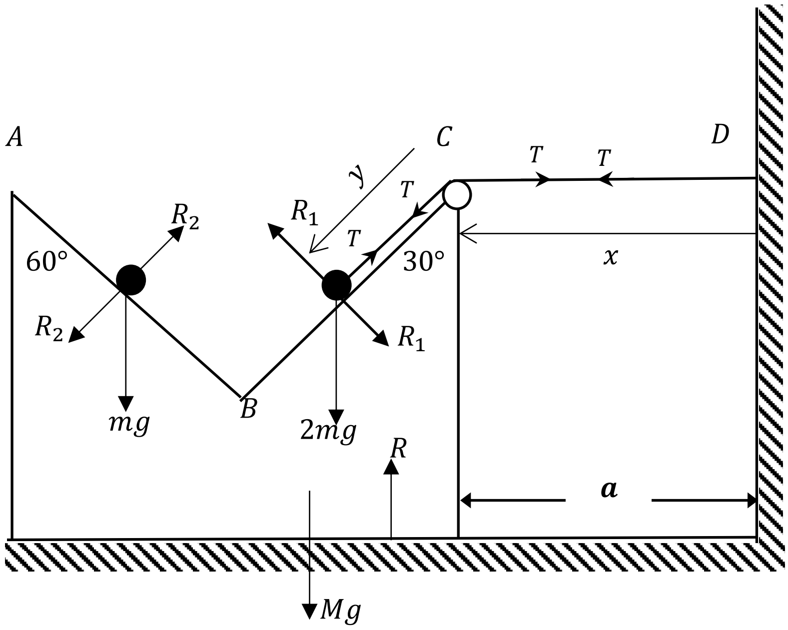
$y = \sqrt{3}u$ (5)

$t_B = \frac{2d}{\sqrt{3}u}$ (5)

Since, $t_A < t_B$ boat A will catch the ship before B (10)

75

12. (a) රූපයේ දැක්වෙන්නේ සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය M වූ සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ, බිත්තියට ලම්බ සිරස් හරස්කඩ වේ. AB හා BC රේඛා ඒවා අඩංගු මුහුණත් වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. D යනු කුඤ්ඤයේ සිට a දුරින් පිහිටි සිරස් බිත්තිය මත, A හා C සමඟ එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි අවල ලක්ෂ්‍යය වේ. C හි පිහිටි අවල සුමට කප්පිය මතින් යන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර D ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇත. ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක් AB මුහුණත මත අල්වා තබා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. එක් අංශුවක් හෝ B වෙත ළඟාවීමට ප්‍රථම කුඤ්ඤය බිත්තිය වෙත ළඟාවේ නම්, කුඤ්ඤය බිත්තිය වෙත ළඟාවීමට ගතවන කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



$x + y = k$

$\ddot{x} + \ddot{y} = 0 \ \rightarrow \ \ddot{x} = -\ddot{y}$ (5)

$a_{WE} = \rightarrow F$ $\quad a_{QW} = f \searrow$ $\quad a_{PW} = F \swarrow$

$a_{PE} = \swarrow F \ \ \rightarrow F$ (5) $\quad a_{QE} = \searrow f \ \ \rightarrow F$ (5)

$F = ma$ (5) $(Forces)$ (5) $(Accelerations)$

$for\ Q \searrow \quad mg\cos 60 = m\,(f + F\cos 30) \text{---}\rightarrow (1)$ (5) $(Equation)$

(5) $(Forces)$ (5) $(Accelerations)$

$for\ P \swarrow \quad 2mg\cos 30 - T = 2m\,(F - F\cos 60) \text{--}\rightarrow (2)$ (5) $(Equation)$

$for\ the\ system \rightarrow$

(5) (5) (5) $(Accelerations)$

$T = MF + 2m(F - F\cos 60) + m(F + f\cos 30) \text{---}\rightarrow (3)$ (5) $(Equation)$

(5) $(Forces)$

$for\ wedge \text{---}\rightarrow$

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = 0 + \frac{1}{2}Ft^2 \text{---}\rightarrow (4)$ (5)

Note:
when equation has not written, provide marks for the forces marked in the diagram.

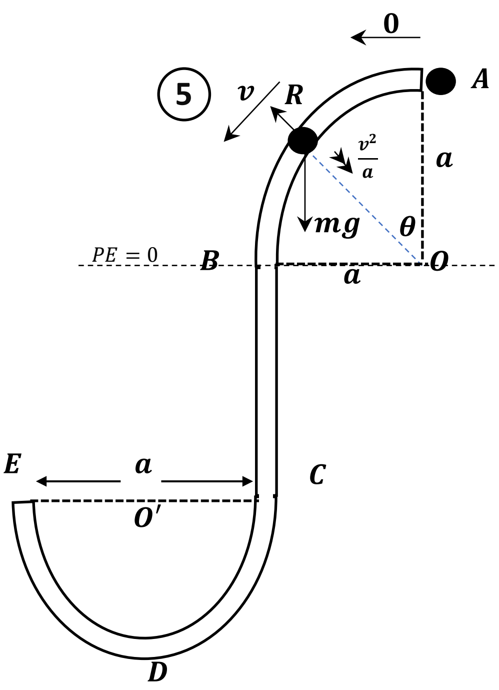
75

(b) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ සුමට තුනී නලයක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. AB කොටස කේන්ද්‍රය O වූ ද අරය a වූ ද වෘත්තයක $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$ පරිදි වූ වෘත චාපයකි. BC යනු දිග a වූ සිරස් කොටසක් වේ. CDE යනු විශ්කම්භය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසකි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A හි තබා සීරුවෙන් නලය තුලට මුදාහරී.

(i) A සිට B දක්වා P හි චලිතයේ දී OA සමග θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් OP සාදන විට, එහි වේගය v නම් $v^2 = 2ga(1 - cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

P මත නලය මගින් ඇතිකෙරෙන අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව R නම්, R සොයන්න. තවද θ හි අගය $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ දී ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වන බව පෙන්වන්න.

(ii) E හිදී ප්‍රවේගය සොයා අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $8mg$ වන බව පෙන්වන්න.



(i) *Law of energy conservation*

$$mga = \frac{1}{2}mv^2 + mgacos\theta$$ (15)

$$v^2 = 2ga(1 - cos\theta)$$ (5)

25

(ii) $F = ma$ ↘

$$mg\ cos\theta - R = m\frac{v^2}{a}$$ (10)

$$R = mg\ cos\theta - 2mg(1 - cos\theta)$$

$$R = mg(3cos\theta - 2)$$ (5)

$$let\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$when\ 0 < \theta < \alpha \dashrightarrow R > 0$$
$$\alpha < \theta < \frac{\pi}{2} \dashrightarrow R < 0$$ (5)

Therefore,
R taking opposite direction pasing the posistion $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. (5)

25

(iii) $when\ \theta = \frac{\pi}{2} \dashrightarrow v^2 = 2ga \dashrightarrow v = \sqrt{2ga}$

from B to C
law of energy conservation

$$\frac{1}{2}m(2ga) = \frac{1}{2}mv_C^2 - mga$$ (10)

$$v_C = 2\sqrt{ga}$$

$$v_C = v_E = 2\sqrt{ga}$$ (5)

At the point E, $F = ma \dashrightarrow$

$$R_E = m\left(\frac{v_E^2}{a/2}\right) = 8mg$$ (5)

(5)

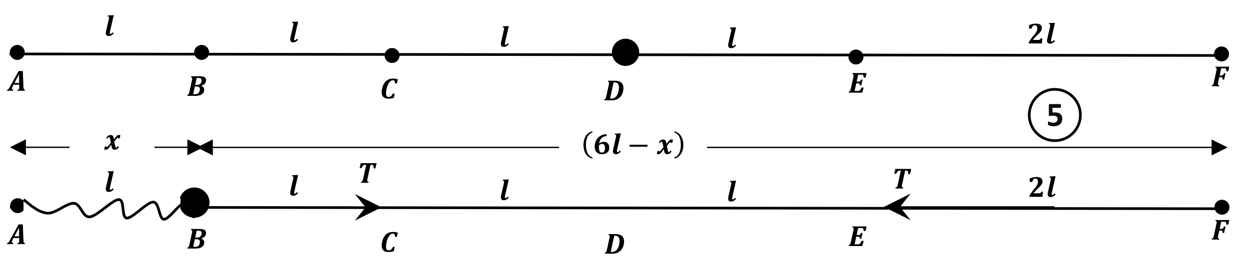
25

13. A, B, C, D, E හා F යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත $AB = BC = CD = DE = l$ හා $EF = 2l$ වන පරිදි සරල රේඛීයව පිහිටි ලක්ෂ්‍ය හයකි. දිග $4l$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් A හා F ලක්ෂ්‍ය සම්බන්ධ කර, මේසය මත චලනය විය හැකි ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් D හිදී තන්තුවට සවිකර ඇත. අංශුව B වෙත ඇද නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. අංශුව t කාලයකදී A සිට E දෙසට x, $(l \le x \le 2l)$ දුරක් විස්ථාපනය වේ නම් අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \frac{\lambda}{2ml}(x - 4l) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය වේ.

(i) $X = x - 4l$ ලෙස ගැනීමෙන් $\ddot{X} + \frac{\lambda}{2ml}X = 0$ බව පෙන්වන්න.
ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් $X = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් α, β හා ω නියතවල අගයයන් සොයන්න.
ඒ නයින් අංශුව $\sqrt{\frac{2lm}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ කාලයකට පසු $\sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$ ප්‍රවේගයෙන් C ලක්ෂ්‍යය පසු කරන බව පෙන්වන්න.

(ii) $2l \le x \le 4l$ සඳහා Y සුදුසු ලෙස තෝරාගැනීමෙන්, අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{Y} + \frac{\lambda}{ml}Y = 0$ යන්නෙන් දෙනු ලබනු බව පෙන්වන්න.
ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් $Y = \alpha'\cos(\omega'(t - t_0)) + \beta'\sin(\omega'(t - t_0))$ ආකාරයෙන් පවතී යැයි උපකල්පනය කරමින් α', β' හා ω' නියත වල අගයයන් සොයන්න. මෙහි $t_0 = \sqrt{\frac{2lm}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ වේ.

(iii) ආරම්භයේ සිට P අංශුව E ලක්ෂ්‍යය වෙත පළමු වරට පැමිණීමට ගතවන කාලය $2\sqrt{\frac{l}{m}}\left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.



(5)

$(\boldsymbol{i})$ *when* $l \le x \le 2l$

$T = \frac{\lambda}{2l}(6l - x - 2l)$ (5)

$T = \frac{\lambda}{2l}(4l - x)$

Applying, $F = ma$

$m \longrightarrow \; T = m\ddot{x}$ (5)

$\frac{\lambda}{2l}(4l - x) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{\lambda}{2ml}(x - 4l) = 0$ (5)

put, $x - 4l = X \longrightarrow \ddot{x} = \ddot{X}$ (5)

$\ddot{X} + \frac{\lambda}{2ml}X = 0$

$X = x - 4l = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$

$t = 0, x = l, -3l = \alpha$ (5)

$\dot{X} = \dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ (5)

$t = 0, x = l, \dot{x} = 0$

$0 = \beta\omega \longrightarrow \beta = 0$ (5)

$\ddot{X} = \ddot{x} = -\alpha\,\omega^2\cos\omega t - \beta\,\omega^2\sin\omega t$ (5)

$\ddot{X} = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$

$\ddot{X} = -\omega^2 X \longrightarrow \ddot{X} + \omega^2 X = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{2ml}}$ (5)

$x = 4l - 3l\cos\omega t$

$x = 2l,\quad t?$

$2l = 4l - 3l\cos\omega t$

$\cos\omega t = \frac{2}{3} \longrightarrow t = \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (5)

$t = \sqrt{\frac{2ml}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

here, $\dot{x} = 3l\omega\sin\omega t$

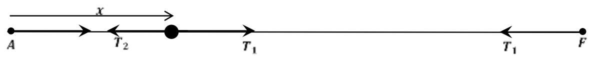
$\dot{x} = 3l\omega\sqrt{1 - \cos^2\omega t} \longrightarrow 3l\omega\sqrt{1 - \frac{4}{9}}$

$\dot{x} = 3l\omega\frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}l\omega = \sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$

$\therefore$ *the velocity at C is* $\sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$ (5)

60

$(\boldsymbol{ii})$ *when* $2l \le x \le 4l$



$T_1 = \frac{\lambda}{2l}(6l - x - 2l) = \frac{\lambda}{2l}(4l - x)$

$T_2 = \frac{\lambda}{2l}(x - 2l)$ (5)

$m \dashrightarrow \; T_1 - T_2 = m\ddot{x}$ (5)

$T_1 - T_2 = \dfrac{\lambda}{2l}(4l - x + 2l - x) = m\ddot{x}$ (5)

$\dfrac{\lambda}{2l}2(3l - x) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} = \dfrac{\lambda}{ml}(3l - x) \dashrightarrow \ddot{x} + \dfrac{\lambda}{ml}(x - 3l)$ (5)

similarly take $(x - 3l) = Y$

$\ddot{Y} + \dfrac{\lambda}{ml}Y = 0$

Now, $Y = \alpha' \cos\omega'(t - t_0) + \beta' \sin\omega'(t - t_0)$ (5)

when $t = t_0, x = 2l$ *and* $\dot{x} = \dot{Y} = \sqrt{\dfrac{5\lambda l}{2m}}$ (5)

$2l - 3l = \alpha' \dashrightarrow \alpha' = -l$ (5)

$\dot{x} = \dot{Y} = -\alpha'\omega' \sin\omega'(t - t_0) + \beta'\omega' \cos\omega'(t - t_0)$ (5)

$\beta'\omega' = \sqrt{\dfrac{5\lambda l}{2m}}$ (5)

similarly, $\omega' = \sqrt{\dfrac{\lambda}{ml}} \dashrightarrow \beta' = l\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ (5)

50

(iii) $x - 3l = -l\cos\omega'(t - t_0) + l\sqrt{\dfrac{5}{2}}\sin\omega'(t - t_0)$ (5)

when $x = 4l, t?$

$l = -l\cos\omega'(t - t_0) - l\sqrt{\dfrac{5}{2}}\sin\omega'(t - t_0)$ (5)

$\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\cos\omega'(t - t_0) - \sqrt{\dfrac{5}{7}}\sin\omega'(t - t_0)$ (5)

$= \cos\beta \cos\omega'(t - t_0) - \sin\beta \sin\omega'(t - t_0)$ (5)

where, $\cos\beta = \sqrt{\dfrac{2}{7}}$ *and* $\sin\beta = \sqrt{\dfrac{5}{7}}$ (5)

$\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \cos\{\beta + \omega'(t - t_0)\}$ (5)

$\beta + \omega'(t - t_0) = \cos^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$

$\omega'(t - t_0) = \pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$

$t = \dfrac{1}{\omega'}\left\{\pi - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)\right\} + t_0$ (5)

$t = \sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}}\left\{\pi - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)\right\} + \sqrt{\dfrac{2ml}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

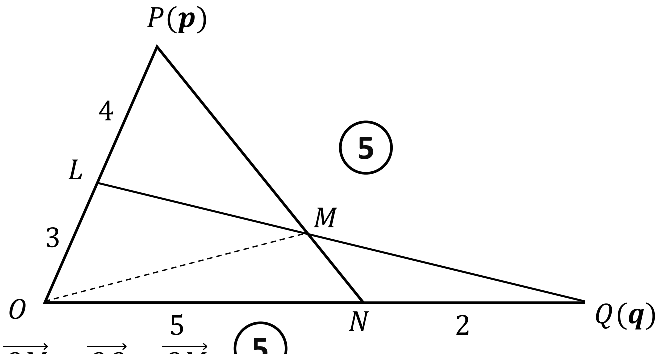
$t = \sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}}\left\{\pi - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) + \sqrt{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ (5)

40

14. (a)

O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් P හා Q ලක්ෂ්‍ය වල පිහිටුම් දෛශික පිලිවෙලින් $\underline{p}$ හා $\underline{q}$ වේ. L යනු $OL:LP = 3:4$ වන පරිදි OP මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද N යනු $ON:NQ = 5:2$ වන පරිදි OQ මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද වේ. PN සහ QL රේඛා වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය M නම් $\overrightarrow{OM} = \underline{q} + \lambda(3\underline{p} - 7\underline{q})$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අදිශයකි.

$\overrightarrow{OM}$ සඳහා තවත් ප්‍රකාශනයක් ලබා ගැනීමෙන් M ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{p}$ හා $\underline{q}$ ඇසුරින් සොයන්න.



(5)

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM}$ (5)

$= \overrightarrow{OQ} + \alpha\overrightarrow{QL}$ (5)

$= \overrightarrow{OQ} + \alpha(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OL})$ (5)

$= \boldsymbol{q} + \dfrac{\alpha}{7}(3\boldsymbol{p} - 7\boldsymbol{q})$ (5)

$= \boldsymbol{q} + \lambda(3\boldsymbol{p} - 7\boldsymbol{q})$ *where* $\lambda = \alpha/7$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ (5)

$= \boldsymbol{p} + \beta\overrightarrow{PN}$ (5)

$= \boldsymbol{p} + \beta(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON})$

$= \boldsymbol{p} + \beta\left(-\boldsymbol{p} + \dfrac{5}{7}\boldsymbol{q}\right)$ (5)

$= \boldsymbol{p} + \mu(5\boldsymbol{q} - 7\boldsymbol{p})$ *where* $\mu = \dfrac{\beta}{7}$ (5)

Now, $\boldsymbol{q} + \lambda(3\boldsymbol{p} - 7\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} + \mu(5\boldsymbol{q} - 7\boldsymbol{p})$ (5)

$1 - 7\lambda = 5\mu$ *and* $1 - 7\mu = 3\lambda$ $(\boldsymbol{p} \nparallel \boldsymbol{q})$ (5) (5)

$\lambda = \dfrac{1}{17} \dashrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{17}(3\boldsymbol{p} + 10\boldsymbol{q})$ (5)

(5)

70

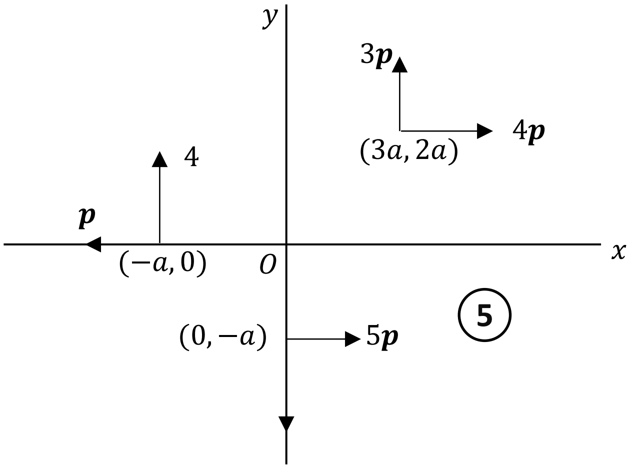
(b) XY තලයේ O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් ක්‍රියාකරන බල තුනකින් සමන්විත ඒකතල බල පද්ධතියක් පහත දැක්වේ.

ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$3a\,\boldsymbol{i} + 2a\,\boldsymbol{j}$	$4P\,\boldsymbol{i} + 3P\,\boldsymbol{j}$
B	$-a\,\boldsymbol{i}$	$-P\,\boldsymbol{i} + 4P\,\boldsymbol{j}$
C	$-a\,\boldsymbol{j}$	$5P\,\boldsymbol{i} - P\,\boldsymbol{j}$

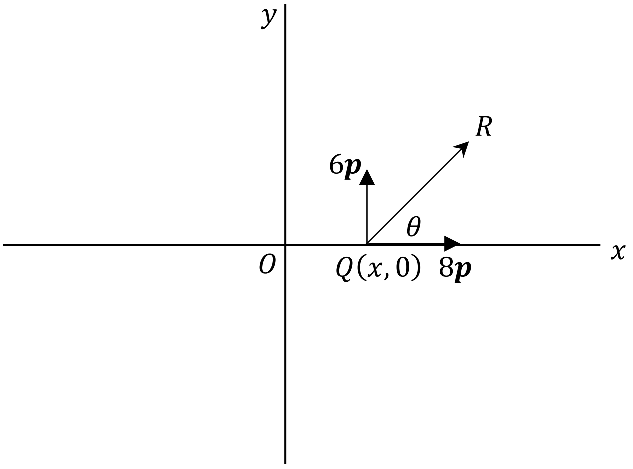
මෙහි $\boldsymbol{i}$ හා $\boldsymbol{j}$ යනු සුපුරුදු අංකනයෙන් පිළිවෙලින් OX හා OY අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික ද P හා a යනු පිළිවෙලින් නිව්ටන් හා මීටර් වලින් මනින ලද ධන රාශි ද වේ.

පද්ධතිය විශාලත්වය $10P\,N$ තනි බලයකට උණනය වන බව පෙන්වා එම තනි බලයේ දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එම තනි බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $4y = 3x + 6a$ බවට පත් කිරීම සඳහා පද්ධතියට එක් කළ යුතු යුග්මයේ විශාලත්වයත් දිශාවත් සොයන්න.



(5)



$\rightarrow X = 4p + 5p - p = 8p$ (5)

$\uparrow Y = 3p - 4p - p = 6p$ (5)

$R = \sqrt{(8p)^2 + (6p)^2} = 10\,p$ (5)

$tan\theta = \frac{3}{4}$ (5)

$R \neq 0$, Thus the system cn be equivalant to a single force $R = 10p$ (5)

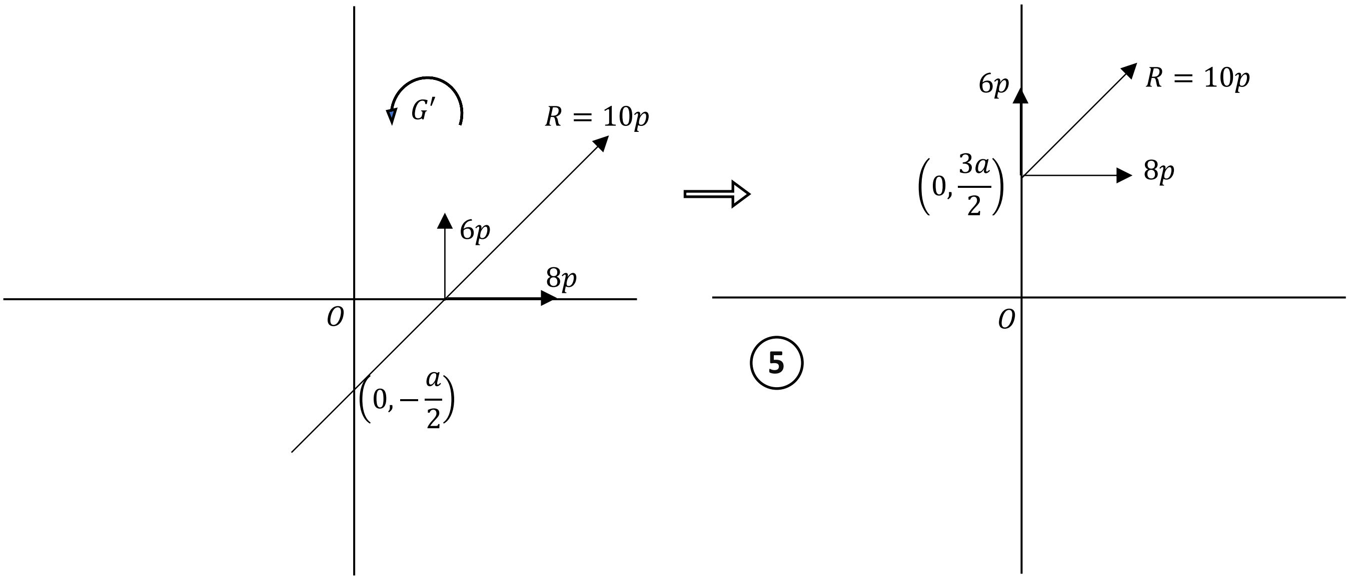
Taking moments about O

$G = (4p \times 3a - 4p \times 2a) + (-4p \times a) + 5pa = 2pa \;--\rightarrow 6p \times x = 2pa$ (10) (5)

$x = \frac{1}{3}a$ (5)

Equation of line of the action

$y - 0 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}a\right) --\rightarrow 4y = 3x - a$ (5) (5)



Let G' be the required moment of the couple,
taking moment about O

$G' + 6p.\frac{a}{3} = -8p.\frac{3a}{2}$ (10)

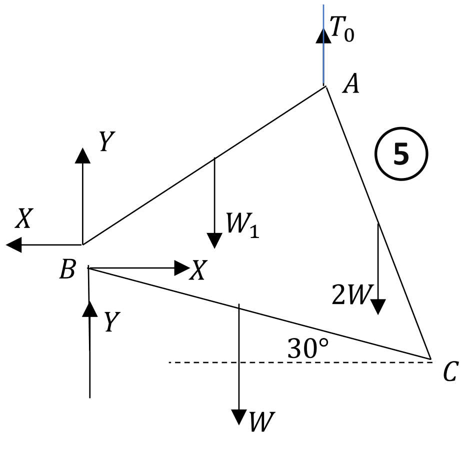
$G' = 14pa$ ↻ (5)

80

---

15. (a) AB, BC හා AC ඒකාකාර දඬු තුනක් ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ අග්‍ර සුවල ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC දඬු වල බර W බැගින් වන අතර AC හි බර $2W$ වේ. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇත. AC දණ්ඩ සිරසට දරණ ආනතිය θ වේ. $tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

θ ඇසුරෙන් B සන්ධියේ දී AB මත ප්‍රතික්‍රියාව සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



Let $AB = 2a$

for the equilibrium of ABC takinf moment about A

$W.a\sin(60-\theta) + W.2acos30°\cos(60+\theta) = a.2W\ sin\theta$ (15)

$\sin(60-\theta) + \sqrt{3}\cos(60+\theta) = 2sin\theta$

$sin60cos\theta - cos60\ sin\theta + \sqrt{3}(cos60cos\theta - sin60sin\theta = 2sin\theta$ (10)

$\frac{\sqrt{3}}{2}.cos\theta - \frac{1}{2}sin\theta + \sqrt{3}(\frac{1}{2}cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta = 2sin\theta$

$tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{4} - -\rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (5)

for the equilibium of AB taking moment about A (10)
$Y.a\sin(60-\theta) - x.2\,a\cos(60-\theta) + W.a\sin(60-\theta) = 0$

for CB taking moment about C
$-2X.a\ \sin(30-\theta) - Y.2a\ cos(30-\theta) + W.a\,cos(30-\theta) = 0$

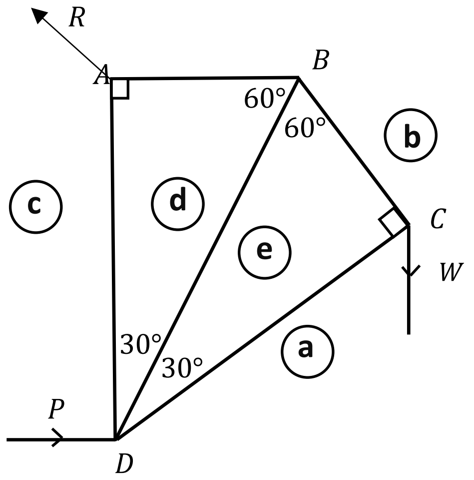
(10)

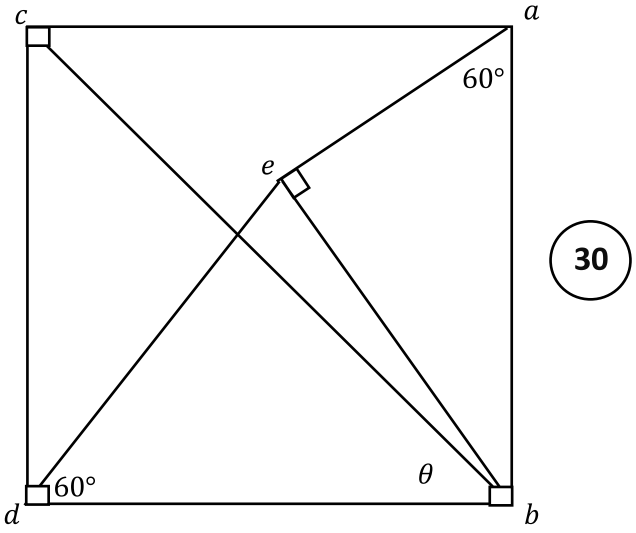
55

(b) AB, BC, CD, DA හා BD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර රූපයේ දැක්වෙන පරිදි වූ රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත. මෙහි $AB = BC, AD = CD$, $A\hat{D}B = C\hat{D}B = 30°$ හා $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 60°$ වේ. රාමු සැකිල්ල A හිදී සුමට ලෙස අසව් කර ඇති අතර C හිදී W භාරයක් එල්ලා ඇත. D හිදී යොදන ලද P තිරස් බලයක් මගින් AB තිරස්ව හා AD සිරස්ව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතී. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් C, B හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ එමගින්,

(i) දඬු වල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වන්න.

(ii) P බලයේ විශාලත්වයත් A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.





Rod	Tension	Thrust
AB	$\frac{\sqrt{3}}{2}W$	-
BC	$\frac{\sqrt{3}}{2}W$	-
CD	-	$\frac{W}{2}$
DA	W	-
DB	-	$\frac{\sqrt{3}}{2}W$

50

Hence, $P = \frac{\sqrt{3}}{2}W$ (5) $R = \frac{\sqrt{3}}{2}W$ (5) $tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (5)

95

16.

(i) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය කේන්ද්‍රයේ දිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් ද

(ii) උස h වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, උඩත් හා යටත් වෘත්තාකාර ගැටිවල අරයන් පිළිවෙළින් R හා $\frac{R}{2}$ වූ ද උස $2R$ වූ ද ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර කොන්ක්‍රීට් කුට්ටියක් සහ අරය R වූ ඝන අර්ධ ගෝලයකින්, අරය R සහ උස R බැගින් වූ සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුක කොටසක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන්, සෑදෙන අර්ධ ගෝලාකාර කබොලක් ඒවායේ අක්ෂ සිරස්ව සහ සමපාත වන පරිදි දෘඪව සවිකිරීමෙන් මල් පෝච්චියක් සාද ඇත. ඡින්නකය හා අර්ධ ගෝලාකාර කබොල ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය σ වූ එකම ද්‍රව්‍යයෙන් නිමවා ඇත.

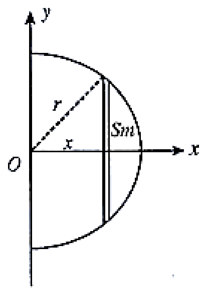
මල් පෝච්චියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\frac{7R}{6}$ බව පෙන්වන්න.

යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි මල් පෝච්චියේ පහල වෘත්තාකාර මුහුණත තිරසට α ආනත රළු තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාව ස්පර්ෂ වන පරිදි තබා ඇත. දැන්, තලය සෙමෙන් උඩු අතට ඇල කරනු ලැබේ.

මල් පෝච්චිය සමතුලිතව පිහිටීමට නම් $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)$ සහ $\mu \geq \tan\alpha$ විය යුතු බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු මල් පෝච්චිය හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

Uniform solid hemisphere

By symmetry, the centre of mass lies on the x - axis. (5)



$Sm = \pi(r^2 - x^2)\,\delta x\,\sigma$,

where σ is the density

$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi(r^2 - x^2)\,\sigma x\,dx}{\int_0^r \pi(r^2 - x^2)\,\sigma\,dx} \quad (5)\ (5)$$

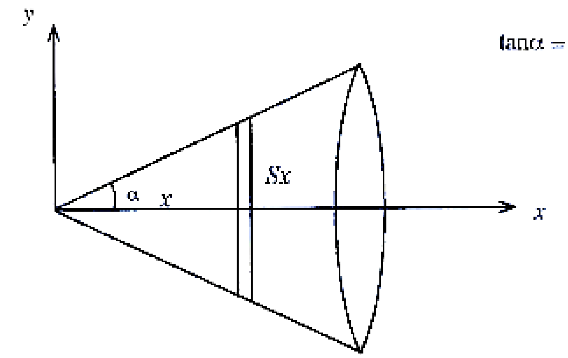
$$= \frac{\left(\frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^r}{\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r} \quad (5)\ (5)$$

$$= \frac{\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}}{r^3 - \frac{r^3}{3}}$$

$$= \frac{3r}{8} \quad (5)$$

30

Uniform solid right circular cone



$\tan\alpha = \frac{r}{h}$

By symmetry, the centre of mass lies on the x - axis. (5)

$Sx = \pi(x\tan\alpha)^2\,Sx\,\rho$, where ρ is the density.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi\tan^2\alpha\,\rho x^2 . x\,dx}{\int_0^h \pi\tan^2\alpha\,\rho x^2\,dx} \quad (5)\ (5)$$

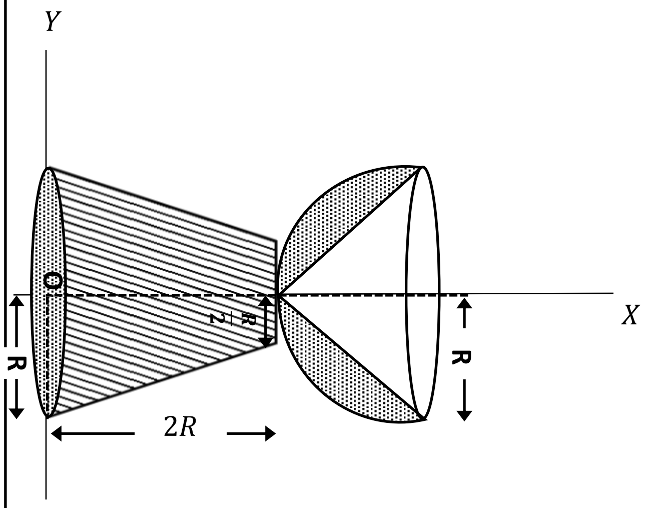
$$= \frac{\frac{x^4}{4}\Big|_0^h}{\frac{x^3}{3}\Big|_0^h} \quad (5)\ (5)$$

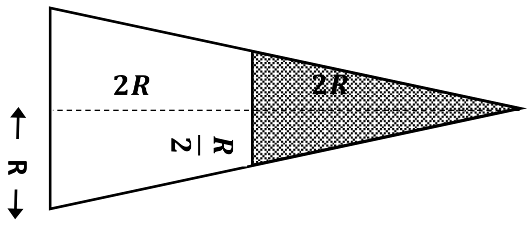
$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$

$\therefore$ The distance from the centre of the base $= h - \frac{3h}{4}$

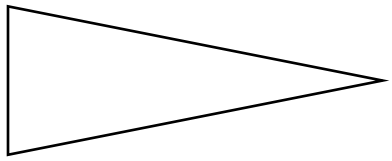
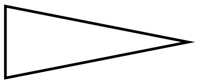
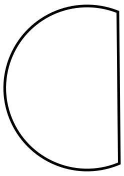
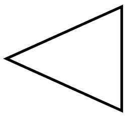
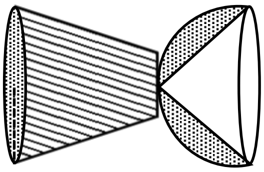
$= \frac{h}{4}$ (5)

30





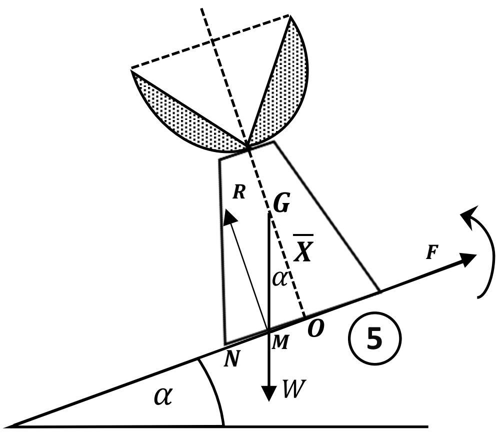
By symmetry, the center of mass lies on OX (5)

Object	Mass $\left(\frac{1}{3}\pi R^3\rho = M\right)$	Distance from O
	$\frac{4}{3}\pi R^3\rho = 4M$ (5)	R (5)
	$\frac{1}{6}\pi R^3\rho = \frac{M}{2}$ (5)	$\frac{5R}{2}$ (5)
	$\frac{2}{3}\pi R^3\rho = 2M$ (5)	$\frac{21R}{8}$ (5)
	$\frac{1}{3}\pi R^3\rho = M$ (5)	$\frac{11R}{4}$ (5)
	$\frac{9}{2}\pi R^3\rho = \frac{9M}{2}$ (5)	$\overline{X}$

$$\frac{9M}{2}.\overline{X} = (4M.R) - \left(\frac{M}{2}.\frac{5R}{2}\right) + \left(2M.\frac{21R}{8}\right) - \left(M.\frac{11R}{4}\right)$$ (10)

$$\overline{X} = \frac{7R}{6}$$ (5)

65



$F = w\, sin\alpha$
$R = w\, cos\alpha$ (5)

To prevent sliding

$$\left|\frac{F}{R}\right| \leq \mu$$

$$\frac{w\, sin\alpha}{w\, cos\alpha} \leq \mu --\rightarrow \ \mu \geq tan\alpha$$ (5)

To prevent rolling

$$OM \leq ON --\rightarrow \frac{OM}{OG} \leq \frac{ON}{OG}$$ (5)

$$tan\alpha \leq \frac{R}{\left(\frac{7R}{6}\right)} --\rightarrow \ tan\alpha \leq \frac{6}{7}$$

$$\therefore \alpha \leq \tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)$$ (5)

25

---

17. (a) නිෂ්පාදන ආයතනයක ඇති A, B හා C ලෙස තත්වයෙන් ශ්‍රේණිගත කර ඇති පෙනුමෙන් සමාන විදුලි බුබුලු සහිත පෙට්ටි 1: 2: 2 අනුපාතයට ඇත. මෙම ශ්‍රේණි තුනෙහිම දෝෂ සහිත සහ දෝෂ රහිත ලෙස විදුලි බුබුලු වර්ග දෙකක් හමුවේ.

A, B හා C ශ්‍රේණිවල දෝෂ සහිත විදුලි බුබුලු හමුවීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් 0.00, 0.10, හා 0.20 වේ. අහඹු ලෙස තෝරාගත් පෙට්ටියකින් බල්බ දෙකක් අහඹු ලෙස තෝරා ගෙන පරීක්ෂා කරනු ලැබේ.

(i) තෝරා ගත් බල්බ දෙකම දෝෂ රහිත විදුලි බුබුලු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) තවද පරීක්ෂාවට භාජනය කල විදුලි බුබුලු දෙකම දෝෂ රහිත විදුලි බුබුලු නම්, එය B ශ්‍රේණියේ පෙට්ටියකින් ගත් බල්බයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

A: *The box chosen containing bulb of Grade A*
B: *The box chosen containing bulb of Grade B*
C: *The box chosen containing bulb of Grade C* (5)

X: *The two bulbs tested are found to be satisfactory*

$P(A) = 0.2 \quad P(B) = 0.4 \quad P(C) = 0.4$ (5)

$P(X/A) = 1.0 \quad P(X/B) = (1.0 - 0.1)^{2} = 0.81$

$P(X/C) = (1.0 - 0.2)^{2} = 0.64$ (10)

$P(X) = P(A).P(X/A) + P(A).P(X/\boldsymbol{A}) + \mathrm{P(C)}.P(X/\boldsymbol{C})$ (10)

$P(X) = 0.2 \times 1 + 0.4 \times 0.81 + 0.4 \times 0.64$ (5)

$P(X) = 0.78$ (5)

$$P(B/X) = \frac{P(X/B).P(B)}{P(X)} = \frac{0.81 \times 0.4}{0.78}$$ (10) (5)

$P(B/X) = 0.415$ (5)

60

(b) එක්තරා පරීක්ෂණයකට පෙනී සිටි සිසුන් 70 දෙනෙකු ලබාගන්නා ලද ලකුණු වල සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක පන්ති ලකුණු සහ එක් එක් පන්ති ලකුණට අදාල සංඛ්‍යාත පහත වගුවේ දැක්වේ. සමත් වීමේ ලකුණ 35 වේ.

පන්ති ලකුණ	**සංඛ්‍යාතය**
35	05
45	10
55	15
65	30
75	05
85	05

$y_i = \frac{1}{10}(x_i - 55)$ යන පරිණාමනය භාවිතයෙන් මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාවය නිමානය කරන්න.

මෙම පරීක්ෂණයට පෙනී සිටි මුලු සිසුන් ගණන 100 ක් වන අතර මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් $\mathbf{48}$ හා $\mathbf{21.5}$ ලෙස දී ඇත. අසමත් සිසුන් 30 දෙනාගේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

---

x_i	f_i	$y_i = \left(\frac{x_i - 55}{10}\right)$	$f_i y_i$	$f_i {y_i}^2$
35	05	-2	-10	20
45	10	-1	-10	10
55	15	0	0	15 (5)
65	30	1	30	30
75	05	2	10	20
85	05	3	15	45
	70	(5)	**35** (5)	**140** (5)

$\overline{X} = 10\overline{Y} + 55$ (5)

$\overline{Y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$ (5)

$\overline{X} = 10 \times \frac{1}{2} + 55 = 60$ (5)

$\sigma_x^2 = c^2\left[\frac{\sum f y^2}{\sum f} - \overline{y}^2\right]$ (5)

$\sigma_x^2 = 10^2\left[\frac{140}{70} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$ (5)

$\sigma_x^2 = 10^2\left[2 - \frac{1}{4}\right]$

$\sigma_x^2 = 13.2$ (5)

50

$let\ \mu_2\ is\ the\ mean\ of\ the\ 30\ students$

$\mu =\ mean\ of\ the\ 100\ students$

$\mu = \frac{n\mu_{1+m\mu_2}}{n+m}\quad n = 70, m = 30$

$4.8 = \frac{70 \times 60 + 30 \times \mu_2}{100}$ (5)

$\mu_2 = 20$ (5)

$let\ \sigma\ is\ the\ standard\ deviation\ of\ the\ 100\ students$

$\sigma^2 = \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + (nd_1^2 + md_2^2)}{n+m}$ (5)

$\sigma_1^2 = 175 \quad \sigma^2 = (21.5)^2 \quad \sigma_2^2\ ?$

$d_1 = 48 - 60 \qquad d_2 = 48 - 20$

$21.5^2 = \frac{(70 \times 175 + 30 \times \sigma_2^2) + (70 \times 144 + 30 \times 28^2)}{100}$ (10)

$3\sigma_2^2 = 137.5$ (5)

$\sigma_2^2 = 45.83$ (5)

$\sigma_2 = 6.73$ (5)

40

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය

கல்வி அமைச்சு

Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - **2022**

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

සංයුක්ත ගණිතය I

A කොටස

(1) $\sum_{r=1}^{n} 6r(r-1) = 2n(n^2-1)$ බව

$n = 1$ විට $\text{L.H.S.} = \sum_{r=1}^{1} 6r(r-1) = 6.1(1-1) = 0$

$\text{R.H.S.} = 2(1)(1^2-1) = 0$

$n = 1$ සඳහා ප්‍රත්ඵලය සත්‍ය වේ. ———— (5)

$n = p$, $(p \in \mathbb{Z}^+)$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යයැයි උපකල්පනයෙන්,

$\sum_{r=1}^{p} 6r(r-1) = 2p(p^2-1)$ ------------------(1) ———— (5)

$n = p+1$ සඳහා සාධනය

මේ සඳහා (1)හි දෙපසටම මෙම ශ්‍රේණියේ $(p+1)$ වන පදය ,

$T_{p+1} = 6(p+1)(p+1-1) = 6p(p+1)$ එකතු කරමු.

එවිට

$(1) \Rightarrow \sum_{r=1}^{p} 6r(r-1) + T_{p+1} = 2p(p^2-1) + T_{p+1}$

$= 2p(p^2-1) + 6p(p+1)$ ———— (5)

$= 2p(p+1)(p-1) + 6p(p+1)$

$= 2((p+1)[p(p-1) + 3p]$

$= 2((p+1)[p^2 + 2p]$

$= 2((p+1)[(p+1)^2 - 1]$ ———— (5)

$\therefore n = p$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් එවිට සඳහාද ප්‍රත්ඵලය සත්‍ය වන බව සාධනය වේ.

තවද $n = 1$ සඳහාද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය විය.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයට අනුව සියලු ධන නිඛිල n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. ———— (5)

---

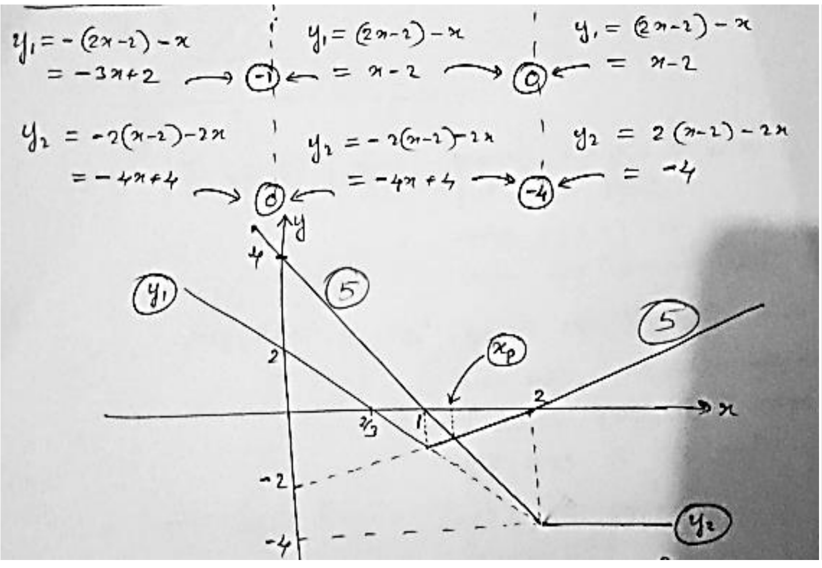
(2) $y = |2x-2| - x$ හා $y = 2|x-2| - 2x$

$|2x-2| \geq 0 \Rightarrow |2x-2| = 2x-2 \rightarrow x \geq 1$ විට

$|2x-2| < 0 \Rightarrow |2x-2| = -(2x-2) \rightarrow x < 1$ විට

$x-2 \geq 0 \Rightarrow |x-2| = x-2 \rightarrow x \geq 2$ විට

$x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \rightarrow x < 2$ විට



x_P

$x - 2 = -4x + 4$

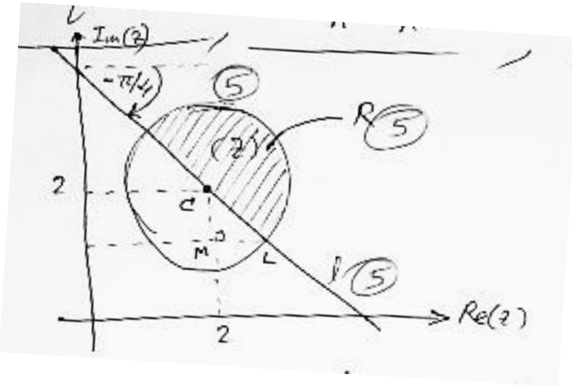
$x = \frac{4}{5}$

$y_1 = |2x-2| - x$ හා $y_2 = 2|x-2| - 2x$

$y_2 > y_1 \longrightarrow 2|x-2| - 2x > |2x-2| - x$

$|2x-4| - |2x-2| > x$

$x < \frac{4}{5}$

(3) 

$|\mathbb{Z} - 2 - 2i| \leq 1$ අවශ්‍යතාව සපුරාලන $\mathbb{Z}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා අයත් පෙදෙස වනුයේ , කේන්ද්‍රය $\equiv$ (2,2) හා අරය $= 1$වූ වෘත්තය තුළ ප්‍රදේශයයි.

$Arg(z - 4i) \geq -\frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතාව සපුරාලිය යුතු විට ඉහත වෘත්තය තුළ, එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන l රේඛාවට ඉහළින් පිහිටි අඳුරු කර ඇති පෙදෙස R විය යුතුයි.

Rපෙදෙස තුළ පිහිටමින් Im(z) අවම වනුයේ L *ලක්ෂයේදීය* ———— (5)

$\therefore$ Im(Z) අවම = $\therefore \mathrm{Im}(Z_L)$

$= 2 - CM$

$= 2 - 2Cos\frac{\pi}{4}$

$= 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$ ———— (5)

---

(4) $(\sqrt{3} + 11^{1/5})^{10}$ ප්‍රසාරණයේ $(r + 1)$ වන පදය,

$T_{(r+1)} = {}^{10}_{r}c(\sqrt{3})^{10-r}(11^{1/5})^{r}$ ———— (5)

$= {}^{10}_{r}c.\, 3^{(5-r/2)}11^{r/5}$ ———— (5)

මෙහි $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ වේ.

මෙම පද 11 අතුරින් (පරිමේය පද ලැබෙනුයේ) පදයක් සඳහා පරිමේය අගයක් ලැබෙනුයේ

$r = 0 \rightarrow T_1 = {}^{10}_{0}c3^5$ ———— (5)

$r = 10 \rightarrow T_{11} = {}^{10}_{10}c11^2$ ———— (5) යන පද 2 පමණි

$\therefore$ ඒවායේ එකතුව

$T_1 + T_{11} = {}^{10}_{0}c3^5 + {}^{10}_{10}c11^2$

$= 243 + 121$ ———— (5)

$= 364$

(5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\frac{12-12\cos(2x-\pi/3)}{(6x-\pi)^2}\right]$

$= 12\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1-\cos 2(x-\pi/6)}{36(x-\pi/6)^2}\right]$ ——— (5)

$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1-[1-2Sin^2(x-\pi/6)}{(x-\pi/6)^2}\right]$ ——— (5)

$= \frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\frac{Sin^2(x-\pi/6)}{(x-\pi/6)^2}\right]$ ——— (5)

$= \frac{2}{3}\lim_{x-\frac{\pi}{6}\to 0}\left[\frac{Sin(x-\pi/6)}{(x-\pi/6)}\right].\lim_{x-\frac{\pi}{6}\to 0}\left[\frac{Sin(x-\pi/6)}{(x-\pi/6)}\right].$

$= \frac{2}{3}.1.1$

$= \frac{2}{3}$

හෝ

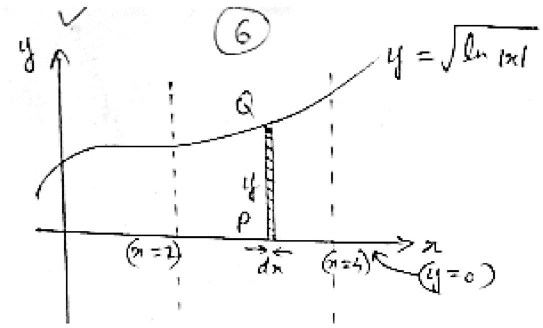
$= \frac{2}{3}\lim_{x-\frac{\pi}{6}\to 0}\left[\frac{Sin(x-\pi/6)}{(x-\pi/6)}\right]^2.$ ——— (5)

$= \frac{2}{3}.(1)^2$

$= \frac{2}{3}$ ——— (5)

---

(06)



අංශුමාත්‍රීය PQ තීරය x අක්ෂය වටා $2\bar{a}$ මගින් හමණයෙන් ජනිත අංශුමාත්‍රීය (තැටිය) සිලින්ඩරයේ පරිමාව

$\delta v = (\pi r^2 h)$

$= \pi y^2 dx$

$\therefore$ $x = 2$ සිට $x = 4$ දක්වා වූ මුලු පෙදෙස (y වක්‍රය යට වර්ගඵලය) x අක්ෂය වටා $2\,\pi$ මගින් භ්‍රමණයෙන් ජනිත පරිමාව

$v = \int_2^4 \delta v$

$= \int_2^4 \pi\, y^2 dx$

$= \pi \int_2^4 ln|x| dx$ ———— (5)

$= \pi \int_2^4 \left[ln[x]. \frac{d(x)}{d(x)} \right] d(x)$

$= \pi \left\{ [x ln|x|]_2^4 - \int_2^4 x . \frac{1}{x}\, dx \right\}$ ———— (5) + (5)

$= \pi\{[4\, ln(4) - 2ln(2)] - [x]_2^4\}$ ———— (5)

$= \pi\{4\, ln(4) - 2ln(2) - (4-2)\}$

$= 2\,\pi\, [2\, ln(4) - ln(2) - 1]$

$= 2\,\pi [ln(16) - ln(2) - 1]$ ———— (5)

$= 2\,\pi\, ln(2^3)$

$= 6\pi ln(2)$

---

(07)

$x = 3, Sec\,\theta$ හා $y = 6\, tan\theta$ බණ්ඩාංක මගින්

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = \frac{(3Sa\theta)^2}{9} - \frac{(6\, tan\theta)^2}{36}$

$= Sec^2\theta - tan^2\theta$

$= 1 + tan^2\theta - tan^2\theta$ ———— (5)

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ බහුඵලය මත පරාමිතිය θ වන ලක්ෂ්‍යයේ

$P \equiv [3\, Sec\theta\, ; 6\, ta\theta]$ ලෙසින් දැක්විය හැක

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, x විෂයයෙන් අවකලනයෙන්

$\frac{2x}{9} - \frac{2y}{36}\frac{dy}{dx} = 0$ ———— (5)

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y} = \frac{4.3\, Sec\theta}{6\, tan\theta} = \frac{2}{Sec\,\theta}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{Sin\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{1/2} = 4$ ———— (5)

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ වන ලක්ෂ්‍යයේ දී බහුවලයට ඇඳි අභිලම්භයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{1}{4}$ වේ. $\because m_1 m_2 = -1$

තවද $\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow P(\theta) \equiv [3sec\frac{\pi}{6}\, ; 6\, tan\frac{\pi}{6}]$

$\equiv (2\sqrt{3}\, ; 2\sqrt{3})$ ———— (5)

∴ $P(\theta = \pi/6)$ වන P ලක්ෂ්‍යයකදී බහුවලයට ඇඳි අභිලම්භය

$$y - y^1 = m(x - x^1)$$

$$y - 2\sqrt{3} = -\frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{3}\right) \quad \text{———————} \quad (5)$$

$$x + 4y = 10\sqrt{3}$$

---

(08)

$l = 0$ හි අනුක්‍රමණය m බැවින්

$l \equiv y = mx + c$ ලෙසින් දැක්විය හැක.

එම රේඛාවට O $(0,0)$ සිට ඇති ලම්බ දුර ඒකක 1ක් බැවින්

$$\left|\frac{m(0)-(0)+c}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 1$$

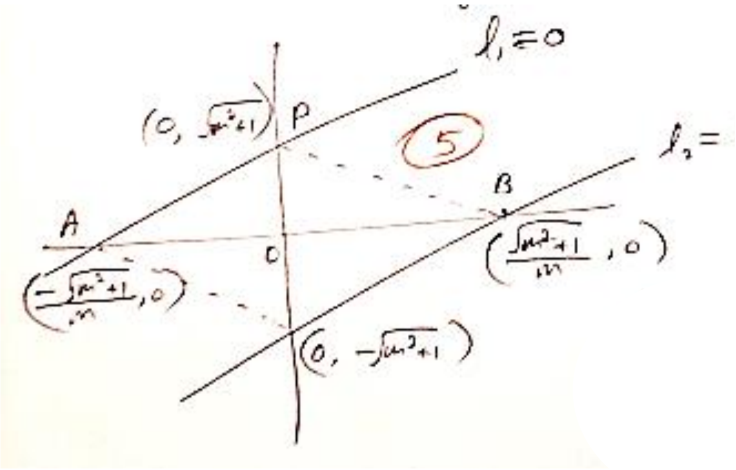
$c = \pm\sqrt{m^2+1}$ ——————— (5)

∴ c සඳහා ප්‍රභින්න අගය 2ක් පවතී

∴ l සඳහා පිහිටීම් 2 කි

ඒවා $l_1 \equiv y = mx + \sqrt{m^2+1}$ හා ——————— (5)

$l_2 \equiv y = mx - \sqrt{m^2+1}$ වේ ——————— (5)

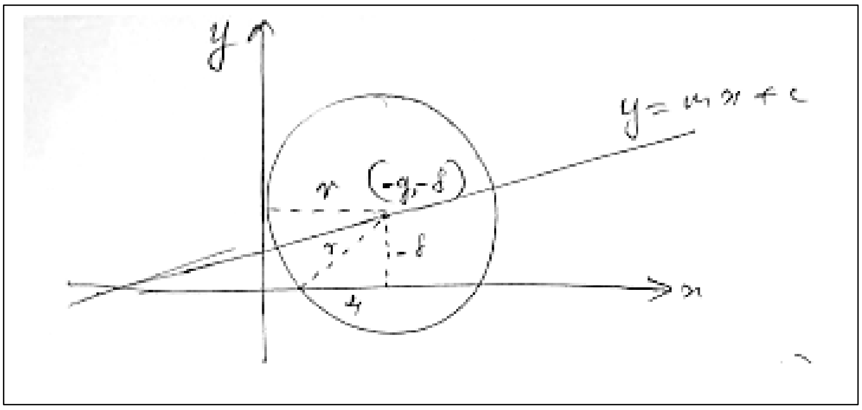


රේඛා 2හි සම්මුඛ පාද හා ඛණ්ඩාංක අක්ෂ විකර්ණ ලෙස පවතින රොම්බසයේ වර්ගඵලය S විට

$S = 2.\frac{1}{2}(AB)(OP)$ ——————— (5)

$= 2\left|\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\right|\sqrt{m^2+1} = \left|\frac{2(m^2+1)}{m}\right|$ වර්ග ඒකක

(09)



$s = 0$ හි කේන්ද්‍රය වන $(-g - f)$ ලක්ෂ්‍ය $y = mxfc$ මත පිහිටන බැවින්,

$\therefore\ -f = m(-g) + c$ ------------(1) ———— (5)

$\therefore$ කේන්ද්‍රය, $(-g, -f) \equiv [-g, (c - mg]$ ලෙස වේ. ———— (5)

- y අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බැවින්,

  $-g = r$

  $g^2 = g^2 + f^2 - p$

  $f^2 = p$

  $(c - mg)^2 = p$ ----------------(2) ———— (5)

- x අක්ෂයෙන් ඒකක 8ක් දිග ජනයක් කපන බැවින්

  $r^2 = 4^2 + f^2$

  $g^2 + f^2 - \text{p} = 16 + f^2$

  $p = g^2 - 16$ -----------------(3) ———— (5)

  (2) = (3) $\Rightarrow (c - mg)^2 = g^2 - 16$ ———— (5)

  $g^2(1 - m^2) + 2gmc = 16 + c^2$

---

(10)

$Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1$

$\frac{Sin^2\theta}{Sin^2\theta} + \frac{Cos^2\theta}{Sin^2\theta} = \frac{1}{Sin^2\theta}$ $(Sin\theta \neq 0$

$1 + Cot^2\theta = Cosec^2\theta$ ———— (5)

$Cot^2\theta - Coses^2\theta = -1$

$(Cot\theta - Cosec\theta)\,(Cot\theta + Cosec\theta) = -1$ ———— (5)

$\frac{5}{4}(Cot\theta + Cosec\theta) = -1$

$\therefore Cot\theta + Cosec\theta = \frac{-4}{5}$ --------------------(1)

$Cot\theta - Cosec\theta = \frac{5}{4}$ -------------------- (2) ———— (5)

$(1) - (2) \Rightarrow 2Cosec\theta = \frac{-4}{5} - \frac{5}{4}$ ———— (5)

$= \frac{-16-25}{20}$

$Cosec\theta = \frac{-41}{40}$ ———— (5)

$\therefore Sin\theta = \frac{-40}{41}$

---

(11)

$f(x) \equiv x^2 + (2a-1)x + (a+1)$

$(x + 2a - 1)$යනු $fx)$ හි සාධකයක් බැවින්

$x = (1-2a)$යනු $f(x) = 0$ හි මූලයක් විය යුතුය. ———— (5)

$\therefore f(1-2a) = 0$ ———— (5)

$(1-2a)^2 + (2a-1)(1-2a) + (a+1) = 0$ ———— (5)

$(1-2a)^2 - (1-2a)^2 + (a+1) = 0$

$a = -1)$ ———— (5) [20]

$a = -1$ විට $fx \equiv x^2 - 3x$

$\equiv x(x-3)$ ———— (5)

$\therefore f(x) = 0$ හි මූල $x = 0$ හා $x = 3$ වේ. ———— (5) [10]

$F(x) \equiv f(p-2x)$ විට

$Fx \equiv (p-2x)^2 - 3(p-2x)$ ———— (5) [10]

$\equiv 4x^2 + 2(3-2p)x + p(p-3)$ ———— (5)

$\Delta F(x) = [[2(3-2p)]^2 - 4.4.p(p-3)$ ———— (5)

$= 4(3-2p)^2 - 10p^2 + 48p = 36 > 0$ ———— (5)

$\therefore$සියලු $p \in R$ සඳහා $\Delta Fx = 6^2 > 0$ වේ.

සියලු $p \in R$ සඳහා $F(x) = 0$ වර්ග සමීකරණයට තාත්වික සෘණ ප්‍රභින්න මූල පවතී. ———— (5) [15]

$F(x) = 0$ හි මූල α, β විට $\alpha + \beta = \frac{-2(3-2p)}{4}$ $\quad \alpha\beta = \frac{p(p-3)}{4}$

$G(x) = 0$ හි මූල λ, μ නම් $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ හා $\mu = \frac{1}{\beta}$ වේ. ——— (5)

එවිට $\lambda + \mu = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-2(3-2p)}{4} \Big/ \frac{p(p-3)}{4} = \frac{4p-6}{p(p-3)}$ ——— (5)

$\lambda\mu = \frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta} = \frac{4}{p(p-3)}$ ——— (5)

එවිට $G(x) = (x-\lambda)(x-\ \mu) = 0$ ——— (5)

$= x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu = 0$ ——— (5) ——— (5)

$= x2 - \frac{4p-6}{p(p-3)}x + \frac{4}{p(p-3)} = 0$

$p(p-3)x^2 - (4p-6)x + 4 = 0$ ——— (10)

එවිට $\Delta G(x) = [-4p-6]^2 - 4.p(p-3).4$ ——— (5)

$= 16p^2 - 48p + 36 - 16p^2 + 48p$

$= 36$ ——— (5)

50

$\Longrightarrow \Delta F(x) = \Delta G(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + \lambda x + (2+\lambda) \quad \text{——— (10)} \\
\hline
x^2 - x - 2 & x^4 - (1-\lambda)x^3 + \mu x + 2 \\
 & x^4 - x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & \quad \lambda x^3 + 2x^2 + \mu x + 2 \\
 & \quad \lambda x^3 - \lambda x^2 - 2\lambda x \\
\hline
 & \qquad (2+\lambda)x^2 + (\mu + 2\lambda)x + 2 \\
 & \qquad (2+\lambda)x^2 - (2+\lambda)x - 2(2+\lambda) \\
\hline
 & \qquad (3\lambda + \mu + 2)x + 2 + 2(2+\lambda) \quad \text{——— (10)}
\end{array}
$$

ශේෂය $10(x+1)$ බැවින්

$10(x+1) = (3\lambda + \mu + 2)x + 2 + 2(2+\lambda)$ විය යුතුයි.

අනුරූප සංගුණක සැසඳීමෙන් $2\lambda + 6 = 10$

$\Rightarrow \lambda = 2$ ——— (5)

$\mu = 2$ ——— (5)

30

එවිට $P(x) \equiv x^4 + x^3 + 2x + 2$

$\equiv x^3(x+1)+2(x+1)$

$\equiv (x+1)(x^3+2)$ ———— (5)

$\therefore (x+1)$ යනු $P(x)$ හි සාධකයකි.

තවදුරටත් $P(x) \equiv [x=(-1)][x^3—2]$

මෙහි $-1=\alpha$ හා $-2=\beta$ විට ———— (5) + (5)

$P(x) \equiv (x-\alpha)(x^3-\beta)$ ආකාරය ගනී. 15

12(a)

වෛද්‍ය		හෙද		සාත්තු සේවා	
Male	Female	Male	Female	Male	Female
3	1	7	4	5	5

Total	
Male	Female
15	10

(i) $^{25}C_5 = \frac{25!}{5!20!} = \frac{25.24.23.22.21}{5.4.3.2.1}$ ———— (5) + (5)

$= 53130$ ———— (5) 15

(ii)

වෛද්‍ය	හෙද	සාත්තු සේවා
M – (+) F – 1	1	1
M – 1 F – 1 + 1	1	1
M – 1 F – 1	1+1	1
M – 1 F – 1	1	1+1

3c1x1c1x11c1x 10c1 = 3x11 = 330
?
3c1x1c1x11c2x 10c1 = 3x55x10 = 1650
3c1x1c1x11c1x 10c2 = 3x11x45 = 1485
3465

———— (5)x7 35

(iii) වෛද්‍ය ක්ෂේත්‍රයේ සියලුදෙනාම ඇතුළත් විය යුතු විට (එහි 4 දෙනෙකු සිටින බැවින්) ඉතිරි පිරිස 21 න් එක් අයෙකු පමණක් තෝරා ගැනීම සිදුකළ යුතුයි. ———— (5)

$\therefore$ එවැනි කමිටු ගණන = $^{21}C_1 = 21$ ———— (5) 10

(b) $f(r) = \frac{2}{(2r-1)^2}$ විට

$f(r+1) = \frac{2}{[2(r+1)-1]^2} = \frac{2}{(2r+1)^2}$ ——— (5)

එවිට $f(r) - f(r+1) = \frac{2}{(2r-1)^2} - \frac{2}{(2r+1)^2}$ ——— (5)

$= \frac{2[(2r+1)^2 - (2r-1)^2]}{(2r-1)^2(2r+1)^2}$

$= \frac{2(8r)}{(2r-1)^2(2r+1)^2} = \frac{16r}{(2r-1)^2(2r+1)^2}$ ——— (5) 15

$\frac{1}{1^2{,}3^2} + \frac{2}{3^2{,}5^2} + \frac{3}{5^2{,}7^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ශ්‍රේණියේ r වන පොදු පදය

$U_r = \frac{r}{(2r-1)^2(2r+1)^2}$ ලෙස දැක්විය හැක ——— (5)

$f(r) - f(r+1) = \frac{16r}{(2r-1)^2(2r-1)^2}$ බැවින්

$f(r) - f(r+1) = 16\text{Ur}$ ලෙස ලැබේ. ——— (5)

$\therefore\ Ur = \frac{1}{16}[f(r) - f(r+1)]$

$\left.\begin{array}{l} r = 1 \rightarrow U_1 = \frac{1}{16}[f(1) - f(2)] \\ r = 2 \rightarrow U_2 = \frac{1}{16}[f(2) - f(3)] \\ r = 3 \rightarrow U_3 = \frac{1}{16}[f(3) - f(4)] \end{array}\right\}$ ——— (5)

$\left.\begin{array}{l} r = (n-1) \rightarrow U_{(n-1)} = \frac{1}{16}[f(n-1) - f(n)] \\ r = n \rightarrow U_n = \frac{1}{16}[f(n) - f(n+1)] \end{array}\right\}$ ——— (5)

$U_1 + U_2 + U_3\ \ldots\ldots + U_n = \frac{1}{16}[f(1) - f(n+1)]$ ——— (5) 35

$\frac{\sum U_r}{r=1} = \frac{1}{16}[f(1) - f(n+1)]$

$= \frac{1}{16}\left[\frac{2}{(2-1)^2} - \frac{2}{[2(u+1)-1]^2}\right]$

$= \frac{1}{16}\left[2 - \frac{2}{(2n+1)^2}\right]$

$= \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$ ——— (5)

තවද

$\mathcal{W}_{2n} = \sum_{r=1}^{2n}(\text{Ur})$ බැවින්

මුල් ප්‍රතිඵලය සැලකීමෙන්

$\sum_{r=1}^{n}(Ur) = \frac{1}{16}[f(1) - f(n+1)]$

මෙහි $n \rightarrow 2n$ විට

$\mathcal{W}_{2n} - = \sum_{r=1}^{2n} Ur = \frac{1}{16}\,[f(1) - f(2n+1)]$ ——— (5)

$= \frac{1}{16}\left[\frac{2}{(2-1)^2} - \frac{2}{[2(2n+1)-1]^2}\right]$

$= \frac{1}{16}\left[2 - \frac{2}{(4n+1)^2}\right]$

$= \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{(4n+1)^2}\right]$ ——— (5)

දැන්

$\mathcal{W}_{2n} - \mathcal{V}_n = \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{(4n+1)^2}\right] - \left[\frac{1}{8}\ 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$ ——— (5)

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(4n+1)^2}\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{(4n+1)^2}{(2n+1)^2} - \frac{(2n+1)^2}{(4n+1)^2}\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{12n^2}{(2n+1)^2} + \frac{4n}{(4n+1)^2}\right]$

$= \frac{n(3n+1)}{22n+1^2 4n+1^2}$ ——— (5)

$\lim_{n\to}(W_{2n} - V_n) = \lim_{n\to}\frac{n(3n+1)}{2\,(2n+1)^2(4n+1)^2}$

$\lim_{n\to}\frac{\frac{3}{n^2} + 1/n^3}{2\,(2+1/n)^2(4+1/n)^2}$ ——— (5)

$= 0$ ——— (5)

$\lim_{n\to}(W_{2n} - V_n) - 0$ අගය, <u>පරිමිත අගයක්</u> බැවින්

$W_{2n} - V_n$ යන්න අභිසාරී වේ . ——— (5)

40

13.

(a) $A\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}$ ——— (5)

$\therefore A^T B = \begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2P & P\\ 0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4P & 2P\\ 8P & 4P\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}P/2 & P/4\\ P & P/2\end{pmatrix}$ ——— (5)

$A^T B = 8\mathrm{C}$ නම්, ආකාරයෙන්

$C = \begin{pmatrix}P/2 & P/4\\ P & P/2\end{pmatrix}$ විය යුතුයි. ——— (5)

නමුත් $C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ බැවින්

$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} P/2 & P/4 \\ P & P/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$ ——— (5)   **20**

එම $p = \frac{1}{2}$ අගය සඳහා,

$B = \begin{pmatrix} 2p & p \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ වේ. ——— (5)

එවිට $B^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

——— (5)

තවද එම $p = \frac{1}{2}$ සඳහා

$A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ∵මුල් කොටසින් ——— (5)

$A^TB + B^TA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ // (5)

∴ $A^TB + B^TA$ (2×2) සමමිතික න්‍යාසයකි //   **20**

$(A^TB)P = I$ වන පරිදි P න්‍යාසයක් පවතීද

$A^TB = Q$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $QP = I$ (5)

$\Rightarrow Q^{-1}QP = Q^{-1}I$ (5)

$\Rightarrow IP = Q^{-1}$

$\Rightarrow P = Q^{-1}$

$Q = A^TB$ නිසා

$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |Q| = 2.2 - 1.4 = 0$ (5)

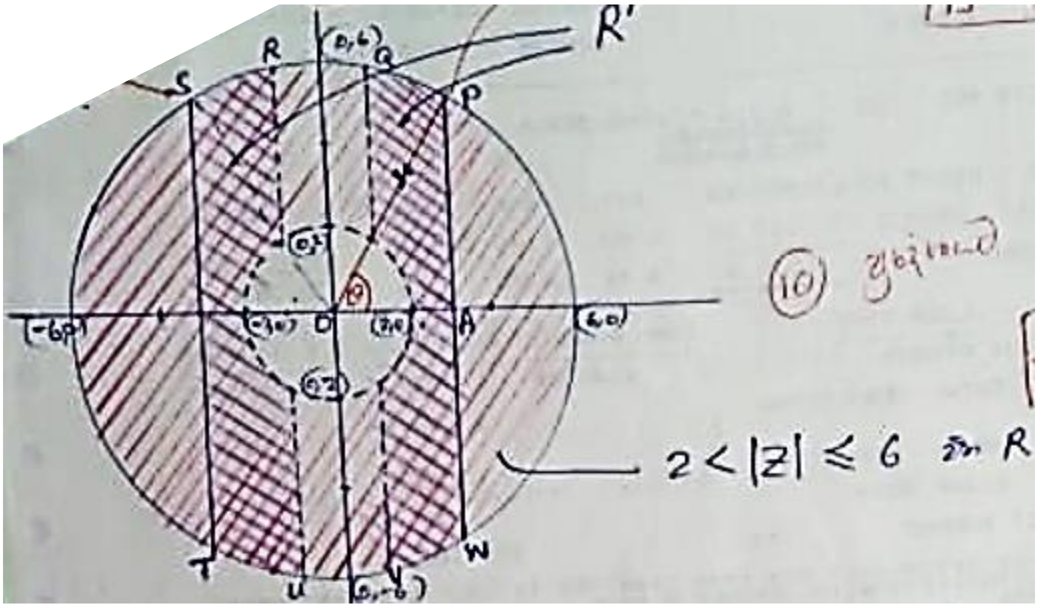
P න්‍යාසයක් පැවතීමට නම් ($P = Q^{-1}$ නිසා)

Q^{-1} පැවතිය යුතුය.

නමුත් $|Q| = 0$ වන නිසා Q^{-1} නොපවතී.

∴ $(A^TB)P = I$ වන පරිදි P න්‍යාසයක් නොපවතී. (5)   **20**

13(b)



$z_R = x + iy$ විට,

$\overline{z_R} = x - iy$ (5)

එවිට $z_0 = z_R + \overline{z_R}$

$= (x+iy) + (x-iy)$ (5) [10]

$= 2x$ //

එවිට $z_0 = 2x$ වන අතර z_0 ලක්ෂ්‍යය R ප්‍රදේශය තුළ පිහිටීමට නම්, එවිට

$2 < 2x \leq 6$ හෝ $-6 \leq 2x < -2$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 3$ (5) $\Rightarrow -3 \leq x \leq -1$ (5)

z_R හා z_0 යන ලක්ෂ්‍ය දෙකම R ප්‍රදේශය තුළ පිහිටීමට නම් z_R ලක්ෂ්‍යය R හි අඳුරු කළ ප්‍රදේශය R' තුළ පිහිටිය යුතුය. (10) [x/20]

w — R' [illegible]

$|w|$ — R' [illegible]

$Arg(w)$ — R' [illegible]

w — R' [illegible]

[illegible]

w ට [illegible], R' [illegible] P [illegible]

OAP $\triangle$ න්,

$$Re(w) = OA = 3$$
$$|w| = 6 \quad (5)$$

$$\cos\theta = \frac{Re(w)}{|w|} = \frac{3}{6}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \pi/3 \quad (5)$$

$$\therefore \quad Re(w) = 3 \text{ හා}$$
$$Im(w) = 6\sin(\pi/3) = 3\sqrt{3} \text{ වේ}$$

$$\therefore \quad w = Re(w) + i\, Im(w) \quad (5)$$
$$= 3 + i\,3\sqrt{3}$$

එවිට $\bar{w} = 3 - i\,3\sqrt{3}$ වේ (5)

$$\therefore \quad w + \bar{w} = 6 \Rightarrow |w + \bar{w}| = 6 \quad (5)$$
$$w - \bar{w} = 6\sqrt{3}\,i \Rightarrow |w - \bar{w}| = 6\sqrt{3} \quad (5)$$

එවිට, $|w+\bar{w}| + i\,|w-\bar{w}| = 6 + i\,6\sqrt{3}$ (5)

$$= 6(1 + i\sqrt{3})$$
$$= 12\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$|w+\bar{w}| + i\,|w-\bar{w}| = 12\left[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right] \quad \boxed{13-6}$$

$$\left(|w+\bar{w}| + i\,|w-\bar{w}|\right)^{12} = \left\{12\left[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right]\right\}^{12} \quad (5)$$

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$$= 12^{12}\left[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right]^{12}$$

$$= 12^{12}\left[\cos\left(12\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad (5)$$
$$= 12^{12}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi)$$
$$= 12^{12}(1 + i\,0) \quad (5)$$
$$= 12^{12}$$

14

$y = f(x) = \frac{3x+p}{(x+q)^2}$

$x = 2$ යනු ස්පර්ශෝන්මුඛයක් වන බැවින් $x = 2$ විට $f(x) \to \infty$ විය යුතුය. මේ සමඟ $x = 2$ විට $f(x)$ හි හරය 0 විය යුතුය.

$\therefore 2 + q = 0 \implies q = -2$ ——— (5)

$\therefore\ y = f(x) = \frac{3x+p}{(x-2)^2}$ ——— (5)

(5) (5)

$f^1(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)^2\frac{d(3x+p)}{dx} - (3x+P)\frac{d}{dx}(x-2)^2}{(x-2)^4}$ ——— (5)

$= \frac{(x-2)^2 3 - (3x+P)2(x-2)}{(x-2)^4}$

$= \frac{3(x-2)-2(3x+p)}{(x-2)^3}$, $x \neq 2$

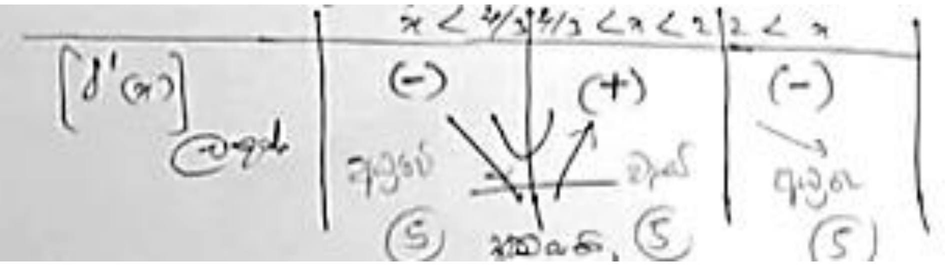
$= \frac{-3x-6-2p}{(x-2)^3}$ ——— (5)

$x = \frac{4}{3}$ විට ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බැවින් $f^1(\frac{4}{3}) = 0 \implies \frac{-3\left(\frac{4}{3}\right)-6-2p}{(x-2)^3} = 0$

$\implies p = -5$ ——— (5) **30**

$$f(x) = \frac{3x-5}{(x-2)^3}$$

$\therefore f^1(x) = \frac{4-3x}{(x-2)^3} \Rightarrow$ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සඳහා $f^1(x) = 0$ විට $x = \frac{4}{3}$



$x = \frac{4}{3}$ විට $f(x) = \frac{3\left(\frac{4}{3}\right)-5}{\left(\frac{4}{3}-2\right)^2} = \frac{-1}{4/9} = \frac{-9}{4}$

- අවම ලක්ෂ්‍යය $\equiv (\frac{4}{3}, \frac{-9}{4})$ ——— (5)
- $x = 0$ විට

$f(0) = \frac{-5}{4}$ $\Longrightarrow y$ අක්ෂය මත අන්තඃඛණ්ඩය

- $y = 0$ විට

$$0 = \frac{3x-5}{(x-2)^2}$$

$= \frac{5}{3}$ $\Longrightarrow x$ අක්ෂය මත අන්තඃඛණ්ඩය

- x=2 සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය වේ. ———————— (5)
- $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+4} = \frac{3/x - 5/x^2}{1 - 4/x + 4/x^2}$

  $x \to \pm\infty\ [f(x)] \to 0 \Longrightarrow x$ අක්ෂය තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය වේ. ———————— (5)

ප්‍රස්ථාරයට -------------(15)

45

- නතිවර්තන ලක්ෂ සඳහා

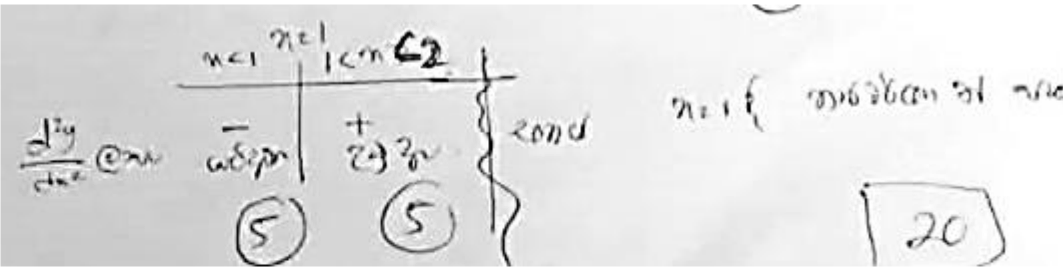
  $f^{11}(x) = \frac{d}{dx} f^{1}(x) = \frac{(x-2)^3(-3)-(4-3x)3(x-2)^2}{(x-2)^6}$

  $= \frac{-3(x-2)-3(4-3x)}{(x-2)^4}$, $x \neq 2)$

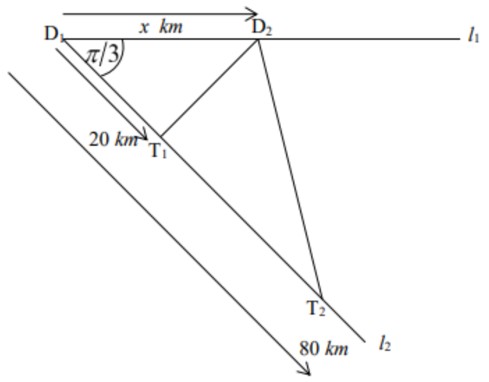
  $= \frac{6x-6}{(x-2)^4}$

$f^{11}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ එවිට $y = f(1) = -2$ ———————— (5)

(1, -2) යනු $y = f(x)$ හි නතිවර්තන ලක්ෂායකි. ———————— (5)



20



$P_1D_2T_1$ ⊿ නම්

$D_2T_1 = \sqrt{(P_1D_2)^2 + (P_1T_1)^2}$

$= \sqrt{(x - 20\cos\frac{\pi}{3})^2 + (20\sin\frac{\pi}{3})^2}$

$= \sqrt{(x-10)^2 + (10\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{(x^2 - 20x + 400}$ ——— (5)

$P_2D_2T_2$ ⊿ නම්

$D_2T_2 = \sqrt{(D_2T_2)^2 + (P_2T_2)^2}$

$= \sqrt{(80\cos\frac{\pi}{3} - x)^2 + (80\sin\frac{\pi}{3})^2}$

$= \sqrt{(40-x)^2 + (40\sqrt{3})^2}$ ——— (5)

$= \sqrt{(x^2 - 80x + 6400}$

D_1T_1 හා D_2T_2 මුලු විදුලි රැහැන් දිග L ——— (5)

$L = D_1T_1 + D_2T_2$

$= \sqrt{(x^2 - 20x + 400} + \sqrt{(x^2 - 80x + 6400}$

x විෂයේ අවකලණයෙන්

$$\left[\frac{2x-20}{2\sqrt{(x^2-20x+400}} + \frac{2x-80}{2\sqrt{(x^2-80x+6400}}\right]$$

(5) (5)

උපරිම, අවම L සඳහා $\frac{dL}{dx} = 0$ විට

$$\frac{2x-20}{2\sqrt{x^2-20x+400}} + \frac{2x-80}{2\sqrt{x^2-80x+6400}} = 0$$ ——— (5)

$$\frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+400}} = \frac{x-40}{2\sqrt{x^2-80x+6400}}$$

$(x-10)^2(x^2-80x+6400)=(x-40)^2(x^2-20x+400)$

$(x^2-20x+100)(x^2-80x+6400)=(x^2-80x+1600)(x^2-20x+400)$

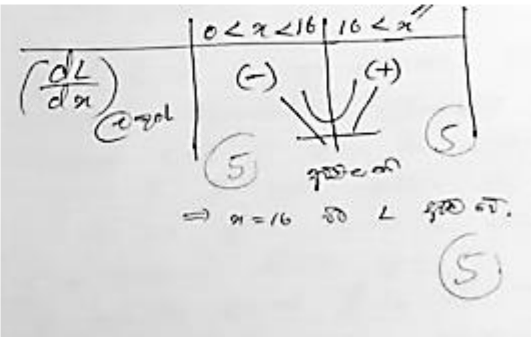
$4500x^2-72000x=0$

$x(x-16)=0$ ——————— (5)

D_2 යනු වෙනත් උප බෙදුම්පලක් බැවින් $D_2 \not\equiv D_1$ ——————— (5)

$\therefore x \neq 0$

$\therefore x = 16$



55

(15)

$\int_0^a f(x)dx$ හි $x = a - X$ ලෙස ආදේශයෙන්

$dx = -dx$

සීමා $\begin{pmatrix} x=0 \\ X=a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x=a \\ X=0 \end{pmatrix}$ ——————— (5)

$\therefore \int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(a-x)(-)dx$ ——————— (5)

$= -\int_a^0 f(a-x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ ——————— (5) 15

(නිශ්චිත අනුකලයක් විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත බැවින්)

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{sin\theta(sin^2\theta - cos^2\theta)}$$

මුල් කොටසේ සිද්ධාන්තය(ප්‍රතිඵලය) භාවිතයෙන්

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\pi/2-\theta)[sin^2(\pi/2-\theta)-cos^2(\pi/2-\theta)]}$$ ——————— (10)

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta(cos^2\theta - sin^2\theta)}$$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta(cos^2\theta - sin^2\theta)} = -\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta(sin^2\theta - cos^2\theta)}$ ——— (10)

$\Rightarrow \text{I} = -\text{J}$

$\text{I}_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{sin\theta cos\theta(sin\theta - cos\theta)}$ යැයි ගනිමු

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(sin\theta + cos\theta)d\theta}{sin\theta cos\theta(sin\theta - cos\theta)(sin\theta + cos\theta)}$ ——— (5)

$-\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta(sin^2\theta - cos^2\theta)} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta(sin^2\theta - cos^2\theta)}$ ——— (5)

$\text{I}_0 = \text{I} + \text{J} = \text{I} - \text{I} = 0$ ——— (5)

35

(a) $x^2 = (Ax + B)(1 + x)^2 + C(1 + x^2)(1 + x) + D(1 + x^2)$

$= (Ax + B)(x^2 + 2x + 1) + C(1 + x + x^2 + x^3) + D(1 + x^2)$

$= (A + C)x^3 + (2A + B + C + D)x^2 + (A + 2B + C)x + (B + C + D)$

$x^3 \rightarrow A + C = 0$ -------- (1)

$x^2 \rightarrow 2A + B + C + D = 1$ -------- (2)

$x^1 \rightarrow A + 2B + C = 0$ -------- (3)

$x^0 \rightarrow B + C + D = 0$ -------- (4)

(2),(4) $\Rightarrow A = 1/2$

(1),(3) $\Rightarrow B = 0$

(3) $\Rightarrow C = -1/2$

(2),(4) $\Rightarrow D = 1/2$ ——— (20)

$\therefore x^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)(1 + x)^2 - \frac{1}{2}(1 + x^2)(1 + x) + \frac{1}{2}(1 + x^2)$

$\div (1 + x^2)(1 + x)^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{x(1+x)^2}{2(1+x^2)(1+x)^2} - \frac{(1+x^2)(1+x)}{2(1+x^2)(1+x)^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)(1+x)^2}$

$= \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1+x)^2}$

$\therefore \int \frac{x^2}{(1+x^2)(1+x)^2} dn = \int \frac{x}{2(1+x^2)} dn - \int \frac{1}{2(1+x)} dn + \int \frac{x}{2(1+x)^2}$ ——— (5)

$= \frac{1}{4}\int \frac{2x}{1+x^2} dn - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)} dn + \frac{1}{2}\int (1 + x)^{-2} dn$

$$= \frac{1}{4} ln(1+x^2) - \frac{1}{2} ln(1+x) - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)} + C$$

(5) (5) (5) (5)

λ යනු නියතයකි

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} ln(1+x^2) - ln(1+x) + ln(\lambda) - \frac{1}{1+x}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{\lambda\sqrt{1+x^2}}{(1+x)}\right) - \frac{1}{(1+x)}\right]$ //

අනුකලන නියතය සඳහා ——— (5)

නියතය $\frac{1}{2} ln|\lambda|$ විය යුතු බව හඳුනා ගැනීම ——— (5)

55

$\int_1^3 \frac{1}{x^3}\ tan^{-1}\ (1/x^2)dn$

ආදේශය, $\frac{1}{x^2} = t$ යැයි ගනිමු ——— (5)

$-2\frac{1}{x^2}dn = dt$

සීමා $\begin{pmatrix} x=1 \\ t=1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x=3^{3/4} \\ t=\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ——— (5)

$\therefore l = \int_1^{\sqrt{3}} tan^{-1}(t)\frac{dt}{-1}$ ——— (5)

$= -\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(tan^{-1}(t), \frac{d(t)}{dt}\right)dt$

$= -\frac{1}{2}\left\{[t\ tan^{-1}(t)]^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} t\ \frac{d[tan^{-1}(t)]}{dt}dt\right\}$

(5) (5)

$= -\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{3}tan^{-1}\sqrt{3}\right) - 1tan^{-1}(1) - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2t}{t^2+1}dt\right\}$ ——— (5)

$= -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}\ (\pi/3) - (\pi/4) - \frac{1}{2}[ln(t^1+1)]^{\sqrt{3}}\right\}$ ——— (5)

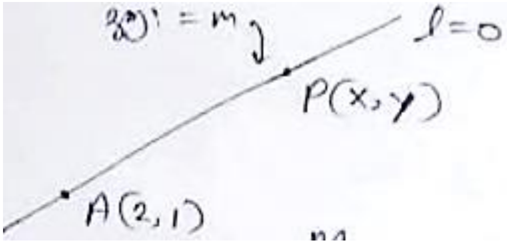
$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[ln94) - \ln(2)]\right\}$ ——— (5)

$= -\frac{1}{2}\left\{\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln(2)\right\}$ ——— (5)

$= \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right)$ //

45

(16)



(a) $M_{PA} = m$

$\frac{Y-1}{X-2} = m$

$\frac{Y-1}{m} = \frac{X-2}{1} = t$ යැයි ගනිමු ———— (5)

$\Rightarrow \frac{X-2}{1} = t \quad , \frac{Y-1}{m} = t$

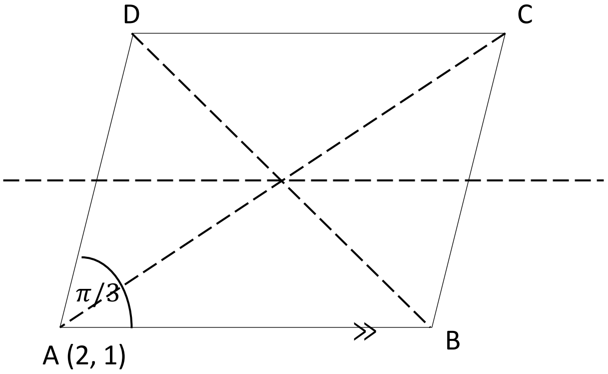
$X = (2 + t) \quad Y = (1 + mt)$

(5) (5)

$\therefore l = 0$ මත ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයක්

$P(X, Y) \equiv [(2 + t)\, ; (1 + mt)] - t$ යනු ජ්‍යාමිතියයි.

15



(1) ප්‍රතිඵලයට අනුව A (2, 1) හරහා යන ඕනෑම රේඛාවක් මත ලක්ෂ්‍යයේ (t ජ්‍යාමිතියක් විට), ලෙසින් දැක්විය හැක.

$AB \parallel ox$ *බැවින්*

$M_{AB} = 0$ වේ.

$\therefore$ AB පාදය මත වූ B ලක්ෂ්‍ය , (M = 0)

$B \equiv [(2 + t_B); (1 + 0)]$ ලෙස දැක්විය හැක. ———— (5)

t_B යනු B ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප පරාමිතියයි

තවද

AB = 4 ඒකක බැවින්,

$AB = \sqrt{[(2ft_B) - 2]^2 + (1-1)^2 = 4}$

$\Rightarrow \; t_B = 4$ ——— (5)

$\therefore B \; \equiv [(2ft_B) : 1] \equiv (6, 1) \parallel$ ——— (5)

$BAD = \pi / 3$ හා $BA \parallel ox$ අක්ෂයය බැවින්

$M_{AD} = \tan \pi/3 = \sqrt{3} = m$

මුල් ප්‍රතිඵලයෙන් ABමත වූ D,

$D \equiv [(2 + t_D); (1 + mt_D)]$ ලෙස දැක්විය හැක.

$\therefore \equiv \left[(2 + t_D); \left(1 + \sqrt{3}t_D\right)\right]$ වේ. ——— (5)

AD = 4 බැවින්

$\sqrt{[(2 + t_D) - 2]^2 + \left[\left(1 + \sqrt{3}t_D\right) - 1\right]^2 = 4}$

$t_2^2 + \; 3t_D^2 = 4$

$t_D^2 = 4$

$t_D = 4$

$t_D = \pm 2$ ——— (5)

$\therefore D \; \equiv \; \left[(2 \pm 2); \left(1 + \sqrt{3}(t_D)\right)\right]$ වේ

නමුත් රොම්බසය මුලුමනින්ම පළමු වෘත්ත පාදයේ බැවින්

$x_D > O$ හා $y_D > O$ විය යුතුය.

$\therefore D \; \equiv \; \left[(2 - 2) : \; \left(1 + \sqrt{3}(-2)\right)\right], t_D = \; -2$ විට

$\equiv \; \left[0, \left(1 + \sqrt{3}(+1)\right)\right]$

$\therefore D \; \equiv \; \left[(2 + 2) : \; \left(1 + \sqrt{3}(+1)\right)\right]$

$\equiv \; \left[4, \left(1 + 2\sqrt{3}\right)\right]$

එවිට $B \; \equiv (6, 1), D \; \equiv \; \left[4 : \left(1 + 2\sqrt{3}\right)\right]$ හි ම:ල:

(BD) ම : ල : $\equiv \; \left[\left(\frac{6+4}{2}\right) : \; \left(\frac{1+1+2\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

$\equiv \; \left[5, \left(1 + \sqrt{3}\right)\right]$ ——— (5)

දැන් $C \; \equiv (\lambda, \mu)$ යැයි ගනිමු

එවිට (AC) ම. ල. $\equiv \; \left[\left(\frac{2+\lambda}{2}\right) : \; \left(\frac{1+\mu}{2}\right)\right]$

රොම්බසයක විකර්ණය සමච්ඡේදනය වන බැවින්

(AC) ම. ල. ≡ (BD) ම : ල :

$\therefore \left[\left(\frac{2+\lambda}{2}\right) : \left(\frac{1+\mu}{2}\right)\right] \equiv \left[5, \left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

$\Rightarrow \frac{2+\lambda}{2} = 5 \Rightarrow \lambda = 8$

$\left(\frac{1+\mu}{2}\right) = \left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow \gamma = \left(1+2\sqrt{3}\right)$

$\therefore C\ (\lambda,\ \mu) \equiv \left[8, \left(1+2\sqrt{3}\right)\right]$ ———— (5) [10]

යළිත් (1) ප්‍රතිඵලයෙන්ම,

A (2, 1) හරහා යන AC විකර්ණය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්

$P \equiv [(2+t) : (1+mt)]$ ලෙසින් දැක්විය හැක. ———— (5)

AC විකර්ණයට අනුරූපව, BD හි ම.ල. $\left[5, \left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

AC විකර්ණය මත බැවින්

$[(2+t) : (1+mt)] \equiv \left[5, \left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

$\therefore 2+t = 5 \Rightarrow t = 3$ ———— (5)

$(1+mt) = 1+\sqrt{3} \Rightarrow 1+m(3) = 1+\sqrt{3} \Rightarrow m = 1/\sqrt{3}$

$\therefore AC \equiv y - y^1 = m\ (n - n^1)$

$y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ ———— (5)

$AC \equiv x - \sqrt{3y} - 2 + \sqrt{3} = 0$ (විකර්ණය)

$BD \perp AC$ බැවින් ———— (5)

$(M_{BD})(M_{AC}) = -1$

$(M_{BD})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1$

$\therefore M_{BD} = -\sqrt{3}$

$\therefore BD \equiv y - y^1 = m(x - x^1)\ , B \equiv (6, 1)$

$y - 1 = -\sqrt{3}(x-6)$ ———— (5)

$\therefore BD \equiv \sqrt{3x} + y - \left(1+6\sqrt{3}\right) = 0$ // [25]

(b) A (2, 1), B(6, 1) විශ්කම්භය ලෙස පවතින $s_1 = 0$ වෘත්ත ලබා ගැනීම

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_1) = 0$ ආකාරය

$P\ (x, y)$

$\therefore S_1 \equiv (x-2)(x-6) + y - 1^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$ ———— (5)

එලෙසම, B(6, 1) : C [8, $(1+2\sqrt{3})$] විශ්කම්භය වූ

$S_2 = 0$ වෘත්තය, ලබා ගැනීම

$\therefore\ S_2 \equiv (x-6)(x-8) + (y-1)\left(y-(1+2\sqrt{3})\right) = 0$

$x^2 + y^2 - 14x - (2+2\sqrt{3})y + (49+2\sqrt{3}) = 0$

$S_1 \Rrightarrow g_1 = -4, t_1 = -1, C_1 = 13$

$S_2 \Rrightarrow g_2 = -7, t_2 = -(1+\sqrt{3}), C_2 = (49+2\sqrt{3})$ ——— (5)

S_1 හා S_2 වෘත්ත ප්‍රලම්භ නම්, එවිට

$2g_1g_2 + 2t_1t_2 = c_1 + c_2$

යන අවස්ථාව තෘප්ත විය යුතුයි.

(17)

(a) $cos(A+B) = cosAcosB - sinAsinB$ ——— (5)

$A = {}^{\pi}/_{2}$ හා $B = \theta$ ලෙස යෙදීමෙන් ——— (5)

$\cos\left({}^{\pi}/_{2} + \theta\right) = cos\,{}^{\pi}/_{2}\ cos\theta - sin\,{}^{\pi}/_{2}\ sin\theta$

$\cos\left({}^{\pi}/_{2} + \theta\right) = -sin\theta$ ——— (5) [$\because\ cos\,{}^{\pi}/_{2} = 0,\ sin\,{}^{\pi}/_{2} = 1$]

මෙහි, $\theta = 110^0$ ලෙස යෙදීමෙන්,

$\cos(90^0 + 110^0) = -sin200^0$

$\sin(110^0) = -\cos(200^0)$ ------------------------------(1) ——— (5)

නැවතත් $\theta = 20^0$ ලෙස යෙදීමෙන්,

$\cos(90^0 + 20^0) = -\sin(20^0)$

$\cos(110^0) = -\sin(20^0)$ -------------------------------(2) ——— (5)

$(1) \div (2) \Longrightarrow \frac{\sin(110^0)}{\cos(110^0)} = \frac{-\cos(200^0)}{-\sin(20^0)}$ ——— (5)

$\tan(110^0) = \frac{\cos(180^0+20^0)}{\sin(20^0)}$

$\tan(110^0) = \frac{-\cos(20^0)}{\sin(20^0)}$ ——— (5)

$\tan(110^0) = -cot(20^0)$

——— (5)

$\tan(110^0) + cot(20^0) = 0$

(b)

$Cos + \theta - Cos\ 2\theta \quad = Cos\ 2(2\theta) - Cos(2\theta)$

$= 2Cos^2(2\theta) - 1 - Cox(2\theta)$

$= 2\ (2Cos^2\theta - 1)^2 - 1 - (2Cos^2\theta - 1)$ ——— (5)

$= 2(4Cos^4\theta - 4Cos^4 + 1) - 1 - 2Cos^2\theta + 1$

$= 8Cos^4\theta - 10Cos^2\theta + 2$ // ——— (5)

$Cos4\theta = Cos\ 2\theta$ විට

$Cos4\theta - Cos\ 2\theta = 0$

$\Rightarrow 8Cos^4\theta - 10\ Cos^2\ \theta + 2 = 0$

$4(Cos^2\theta)^2 - 5(Cos^2\theta) + 1 = 0$

$(4Cos^2\theta - 1)(Cos^2\theta - 1) = 0$ ——— (5)

$4Cos^2\theta - 1 = 0$

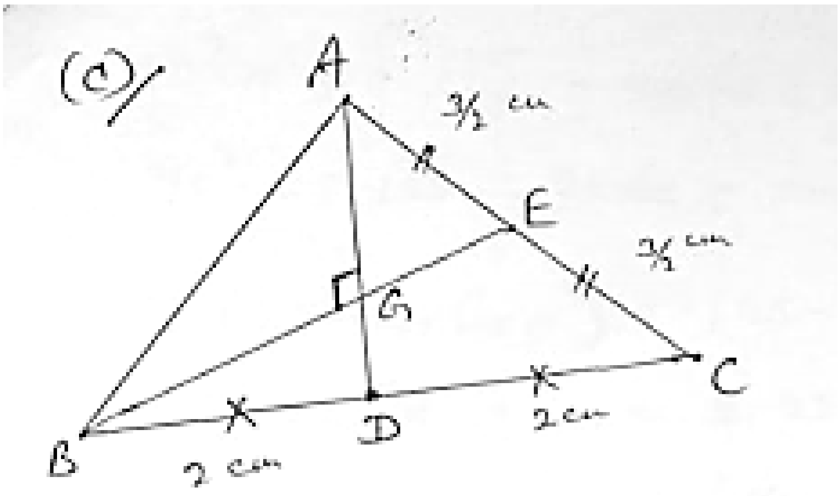
$Cos^2\theta = \frac{1}{4}$ ——— (5)

$Cos^2\theta = 1$

$Cos\ \theta = \pm 1$ ——— (5)

$\therefore\ \cos\theta = {}^1/_2, \cos\theta = -{}^1/_2, \cos\theta = 1$ හා $\cos\theta = -1$ යනු $\cos 4\theta = \cos 2\theta$ සමීකරණය සපුරාලීමේදී වූ ප්‍රභින්න $\cos\theta$ අගය 4කි.

(C)



සුපුරුදු අංකනයෙන් , $\underline{ABC\ \Delta}$

$Cos\ c = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4^2+3^2-c^2}{2.4.3}$

$\therefore\ c^2 = 25 + 24\ Cos\ c$ -----------------(1) ———— (5)

$\underline{ADC\ \Delta}$

$Cos\ c = \frac{(DC)^2+(AC)^2-(AD)^2}{2(DC)(AC)}$ ———— (5)

$= \frac{2^2+3^2-(AD)^2}{2.2.3}$

$\therefore\ (AD)^2 = 13 - 12\ Cos\ c$ -------------------------(2) ———— (5)

$(BCE\ \Delta)$

$Cos\ c = \frac{(BC)^2+(CE)^2-(BE)^2}{2(BC)(CE)}$ ———— (5)

$= \frac{4^2+\left({}^3/_2\right)^2-BE^2}{2.4.{}^3/_2}$

$\therefore (BE)^2 = \frac{73}{4} - 12\ Cos\ c$ ———— (5)

ABG සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයෙන්,

$(AB)^2 = (AG)^2 + (BG)^2$

$= \left[\frac{2}{3}(AD)\right]^2 + \left[\frac{2}{3}(BE)\right]^2$

$= \frac{4}{9}[(AD)^2 + (BE)^2]$ ———— (10)

$C^2 = \frac{4}{9}\left[(13 - 12\ Cos\ c) + \frac{73}{4} - 12\ Cos\ c\right]$ ———— (5)

$9C^2 = 4\left[\frac{125}{4} - 24\ Cos\ c\right]$

$9C^2 = 125 - 96\ Cos\ c$ ———— (5)

$9\ (25 - 24\ Cos\ c) = 125 - 96\ Cos\ c$

$5.24\ Cos\ c = 4.25$ ———— (5)

$Cos\ c = {}^5/_6$

$C = Cos^{-1}\left({}^5/_6\right) =$

(d)

$tan^{-1}\ (x+1) + tan^{-1}\ (x-2) = tan^{-1}(2)$

$tan^{-1}\ (x+1) = \propto$ සහ $tan^{-1}(x-2) = \beta$ යැයි ගනිමු

එවිට $\tan \propto = (x+1)\ \ \tan\beta = (x-2)$

දෙන ලද සමීකරණය

$\propto + \beta = tan^{-1}(2)$

$\tan(\propto + \beta) = 2$ ——— (10)

$\frac{\tan\propto + \tan\beta}{1 - \tan\propto\tan\beta} = 2$

$(x+1) + (x-2) = 2\,[1 - (x+1)(x-2)]$

$2x - 1 = -2x^2 + 2x + 6$

$2x^2 = 7$

$x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ ——— (10)

ප්‍රතිලෝම ටැංජනවල ප්‍රධාන පරාස සැලකීමෙන්

$x > 0$ විය යුතුය

$\therefore x = \sqrt{7/2}$ ——— (5)

එවිට x සඳහා පවතිනුයේ එක් විසඳුමක් පමණි